

# Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

Mohamed NASSIRI

En considérant  $G$  un groupe et  $X$  un ensemble, on peut définir une action de groupe. Plus précisément, on va dire que  $G$  agit (à gauche) sur  $X$  si on a

OU

une application  $\alpha$  défini par

$$\alpha : G \times X \rightarrow X$$

$$(g, x) \mapsto g.x \quad (\text{resp. } x.g)$$

telle que

$$\forall x \in X, 1.x = x$$

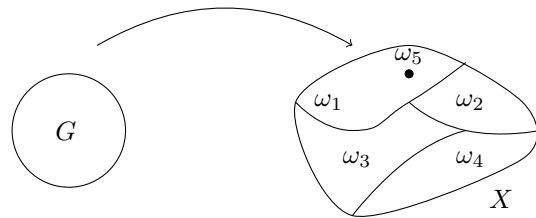
$$\forall (g, g') \in G^2, \forall x \in X, g.(g'.x) = gg'.x$$

un morphisme  $\Phi$  défini par

$$\Phi : G \rightarrow \mathfrak{S}(X)$$

$$g \mapsto \varphi_g : \begin{cases} X & \rightarrow X \\ x & \mapsto g.x \end{cases}$$

Même si la donnée de  $\alpha$  et  $\Phi$  sont équivalentes, il ne faut pas les confondre! En effet,  $\alpha$  n'est pas un morphisme, alors que  $\Phi$  oui! Cela provient du fait que  $X$  peut être un ensemble quelconque et pas forcément un groupe ...



Une des premières propriétés importantes d'une action de groupe est qu'elle partitionne l'ensemble  $X$ .

Les actions de groupes, même les plus simples, sont très efficaces. Par exemple, avec la simple action par translation on obtient le très célèbre théorème de Cayley. L'action par conjugaison nous conduit à deux résultats importants : l'équation aux classes et la formule de Burnside. La première nous donne le théorème de Wedderburn : "*Tout corps fini est commutatif.*"

Sur les espaces de matrices, les actions sont florissantes et nous permettent de reformuler plusieurs théorèmes célèbres : théorème du rang, classification des formes quadratiques, etc.

Du côté de la géométrie affine, on peut définir un espace affine à partir d'une action de groupe : on dit qu'un ensemble  $\mathcal{E}$  est muni d'une structure d'espace affine de direction  $E$  un espace vectoriel, si  $(E, +)$  agit transitivement et librement sur  $\mathcal{E}$  en notant

$$E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$(\vec{v}, P) \mapsto t_{\vec{v}}(P) \underset{\text{not}}{=} P + \vec{v}$$

La géométrie affine et plus particulièrement les isométries qui préservent des parties, permettent de réaliser certains groupes célèbres comme des groupes d'isométries. Par exemple, en notant  $\Delta_4$  le tétraèdre régulier et  $Is(\Delta_4)$  le groupe des isométries préservant  $\Delta_4$ , on peut montrer que  $Is(\Delta_4)$  agit sur les sommets du tétraèdre, et que l'on a l'isomorphisme

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

Lorsque  $X = V$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ , on a même une nouvelle théorie : celles des *représentations linéaires de groupes*. Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  dans  $V$  est la donnée d'un morphisme  $\rho : G \rightarrow GL(V)$ . Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe  $G$  sur  $V$  :

$$G \times V \rightarrow V$$

$$(g, v) \mapsto g.v = \rho(g)(v)$$

## Références

- [GOUal] Les maths en tête : Algèbre, Xavier Gourdon  
 [GRI] Algèbre linéaire 5e Edition, Joseph Grifone  
 [PER] Cours d'algèbre, Daniel Perrin ♠  
 [ML3al] Mathématiques L3 Algèbre, Aviva Szpirglas  
 [DEL] Théorie des groupes 2e édition, Jean Delcourt  
 [OBJ] Objectif Agrégation, Vincent Beck, Jérôme Malick et Gabriel Peyré  
 [PEY] L'algèbre discrète de la transformée de Fourier, Gabriel Peyré  
 [H2G2t1] Histoires hédonistes de groupes et de géométries - Tome 1, Philippe Caldero et Jérôme Germoni

## Développements

- $SO_3(\mathbb{R})$  et les quaternions  
 Théorème de Wedderburn  
 Table des caractères de  $\mathfrak{S}_4$  et les isométries du tétraèdre

## 1 Actions de groupe [ML3al] Définition 5 La relation

p.237 → 242

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ tel que } g.x = y$$

Dans cette leçon,  $G$  est un groupe et  $X$  un ensemble.

est une relation d'équivalence et ses classes sont appelées orbites de  $G$  sous  $X$ . L'orbite d'un élément  $x \in X$  est noté  $\omega(x)$ .

### 1.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 6** Le stabilisateur de  $x$ , noté  $\text{Stab}(x)$ , est le sous-groupe de  $G$  défini par

**Définition 1** On dit que  $G$  agit à gauche (resp. à droite) sur  $X$  si on a une application

$$\text{Stab}(x) = \{g \in G \mid g.x = x\}$$

$$G \times X \rightarrow X \\ (g, x) \mapsto g.x \quad (\text{resp. } x.g)$$

On dit que  $x$  est un point fixe pour l'action de  $G$  si  $\text{Stab}(x) = G$ .

telle que

- (i)  $\forall x \in X, 1.x = x$  (resp.  $x.1 = x$ )  
 (ii)  $\forall (g, g') \in G^2, \forall x \in X, g.(g'.x) = gg'.x$  (resp.  $(x.g).g' = x.gg'$ )

**Exemple 7** Soit  $G$  un groupe (noté multiplicativement). La conjugaison :

$$G \times G \rightarrow G \\ (g, h) \mapsto g.h = ghg^{-1}$$

**Remarque 2** (i) Dans la suite, on considère les actions à gauche.

est une action de groupe.

(ii) Se donner une action de groupe, c'est se donner un morphisme  $\Phi$  défini par

Les orbites sont appelées classes de conjugaison et le stabilisateur de  $x$  est appelé centralisateur (noté  $C_G(x)$ ).

$$\Phi : G \rightarrow \mathfrak{S}(X) \\ g \mapsto \varphi_g : \begin{cases} X & \rightarrow X \\ x & \mapsto g.x \end{cases}$$

**Théorème 8** Théorème de Cayley

Tout groupe est isomorphe à un sous-groupe de permutations.

**Exemple 3** Soit  $G$  un groupe (noté multiplicativement). La multiplication (ou translation) à gauche :

$$G \times G \rightarrow G \\ (g, h) \mapsto g.h = gh$$

**Théorème 9** ♠  $SO_3(\mathbb{R})$  et les quaternions ♠

Soit  $G$  le groupe des quaternions de norme 1. On a l'isomorphisme suivant :

$$G/\{-1, 1\} \xrightarrow{\sim} SO_3(\mathbb{R})$$

est une action de groupe.

### 1.2 Equation aux classes et formule de Burnside

**Définition 4** On dit que l'action est fidèle si

$$(\forall x \in X, g.x = x) \Rightarrow g = 1$$

**Proposition 10** Les orbites de  $X$  sous l'action de  $G$  forment une partition de  $X$  et il existe une bijection

Elle est dite transitive si

$$(\forall x, y \in X, \exists g \in G \text{ tel que } g.x = y)$$

$$f_x : G \backslash \text{Stab}(x) \rightarrow \omega(x) \\ g\text{Stab}(x) \mapsto g.x$$

De plus, l'action induite sur  $\omega(x)$  est compatible avec l'action naturelle de  $G$  sur le quotient  $G \backslash \text{Stab}(x)$  dans le sens suivant :

$$\forall \kappa \in G \backslash \text{Stab}(x), \forall g \in G, f_x(g\kappa) = g.f_x(\kappa)$$

**Corollaire 11** Si  $G$  et  $X$  sont finis, alors  $\text{Card}(\omega(x))$  divise  $|G|$ .

**Proposition 12** Si  $x, y \in X$  sont dans la même orbite, alors  $\text{Stab}(x)$  et  $\text{Stab}(y)$  sont conjugués.

**Proposition 13** Equation aux classes  
On a l'égalité

$$|G| = |Z(G)| + \sum_i \text{Card}(\omega_i)$$

où la somme porte sur toutes les classes de conjugaison de cardinal strictement supérieur à 1.

**Corollaire 14** (i) Si  $G$  est un  $p$ -groupe, on a  $|Z(G)| \geq p$ .

(ii) Tout groupe d'ordre  $p^2$  est abélien.

**Application 15** ♠ Théorème de Wedderburn ♠  
Tout corps fini est commutatif. [PER] p.82

**Proposition 16** On suppose que  $G$  est un  $p$ -groupe et que  $X$  est fini. Soit

$$X^G = \{x \in X \mid \forall g \in G, g.x = x\}$$

l'ensemble des points fixes de  $X$  sous l'action de  $G$ . Alors

$$\text{Card}(X) \equiv \text{Card}(X^G) \pmod{p}$$

**Définition 17** On pose, pour  $g \in G$ ,

$$\text{Fix}(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$$

**Remarque 18** On a, par définition,

$$X^G = \bigcap_{g \in G} \text{Fix}(g)$$

**Proposition 19** Formule de Burnside  
On suppose  $G$  et  $X$  finis. Alors

$$\sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g)) = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$$

Le nombre d'orbites de  $X$  sous l'action de  $G$ , noté  $\text{Card}(\text{Orb}_X(G))$ , est donné par la formule :

$$\text{Card}(\text{Orb}_X(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g))$$

## 2 Exemples d'actions de groupes

### 2.1 Action de $\mathfrak{S}_n$ sur $K[X_1, \dots, X_n]$ [GOUal] p.78

**Définition 20** Soit  $K$  un corps. On définit l'action de  $\mathfrak{S}_n$  sur  $K[X_1, \dots, X_n]$  par

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times K[X_1, \dots, X_n] &\rightarrow K[X_1, \dots, X_n] \\ (\sigma, P(X_1, \dots, X_n)) &\mapsto \sigma.P(X_1, \dots, X_n) \\ &= P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

**Définition 21** On dit qu'un polynôme  $P \in K[X_1, \dots, X_n]$  est symétrique si  $P \in K[X_1, \dots, X_n]^{\mathfrak{S}_n}$  (i.e.) si  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on a

$$P(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}) = P(X_1, \dots, X_n)$$

### 2.2 Actions de groupes sur les espaces de matrices

#### 2.2.1 Action de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par translation et matrices de permutations [DEL] p.61→68

**Définition 22** On définit l'action de  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  par translation par

$$\begin{aligned} \text{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ (P, A) &\mapsto P.A = PA \end{aligned}$$

**Définition 23** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on appelle matrice de permutation une matrice de la forme  $P_\sigma = (p_{ij})$  où  $p_{ij} = \delta_{i\sigma(j)}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$  (où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker).

**Proposition 24** (i) L'ensemble  $\mathcal{P}$  des matrices de permutation est un groupe isomorphe à  $\mathfrak{S}_n$ .

(ii)  $\mathcal{P}$  agit par translation sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

**Exemple 25** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  que l'on note  $M =$

$$(C_1 \ C_2 \ C_3) = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} \text{ et en considérant } \sigma = (123).$$

Alors :

$$P_\sigma M = \begin{pmatrix} L_3 \\ L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \text{ et } MP_\sigma = (C_2 \ C_3 \ C_1)$$

**Proposition 26** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Alors  $\det P_\sigma = \epsilon(\sigma)$ . En d'autres termes, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \xrightarrow{\varphi} & \text{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \phi \downarrow & & \downarrow \det \\ \{-1, 1\} & \longrightarrow & \mathbb{K}^* \end{array}$$

[OBJ] p.188

**2.2.2 Action de  $GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  par équivalence [H2G2t1] p.4-5**

**Définition 27** On définit l'action de  $G := GL_m(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  par équivalence par

$$G \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$((P, Q), A) \mapsto (P, Q).A = PAQ^{-1}$$

On dit que deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  sont équivalentes si elles sont dans la même orbite pour l'action par équivalence.

**Proposition 28** Théorème du rang

En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \mid \exists (P, Q) \in G, B = PAQ^{-1}\}$$

l'orbite de  $A$  sous l'action de  $G$ , on a, pour tout  $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$  :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_B \Leftrightarrow \text{rg} A = \text{rg} B$$

En particulier, les orbites sont paramétrées par le rang, entier compris entre 0 et  $\min(n, m)$ .

**2.2.3 Action de  $O_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$  sur  $GL_n(\mathbb{K})$  : Décomposition polaire [H2G2t1] p.202 → 204**

**Remarque 29** On note  $O_n(\mathbb{C}) = U_n$  pour plus de clareté.

**Définition 30** On définit l'action de  $O_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K})$  sur  $GL_n(\mathbb{K})$  par

$$O_n(\mathbb{K}) \times GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$$

$$(O, M) \mapsto O.M = MO^*$$

**Proposition 31** L'orbite de  $M \in GL_n(\mathbb{R})$  (resp.  $GL_n(\mathbb{R})$ ) contient une unique matrice symétrique (resp. hermitienne) définie positive.

**Remarque 32** En fait, on a mieux comme résultat. On peut démontrer le théorème suivant.

**Théorème 33** ♠ Décomposition polaire ♠

On a les homéomorphismes suivants :

$$O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{R}), (O, S) \mapsto OS$$

$$U_n \times \mathcal{H}_n^{++} \xrightarrow{\sim} GL_n(\mathbb{C}), (U, H) \mapsto UH$$

**2.2.4 Action de  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$  par conjugaison [H2G2t1] p.84 → 86**

**Définition 34** On définit l'action de  $GL_n(\mathbb{C})$  sur  $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$  (ensemble des matrices diagonalisables de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ) par conjugaison par

$$GL_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$$

$$(P, A) \mapsto P.A = PAP^{-1}$$

On dit que deux matrices  $A, B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$  sont semblables si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

**Théorème 35** En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \mid \exists P \in GL_n(\mathbb{C}), B = PAP^{-1}\}$$

l'orbite de  $A$  sous l'action de  $GL_n(\mathbb{C})$ , et  $\text{Spec}(A)$ , l'ensemble des valeurs propres de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  prises avec multiplicités, on a, pour tout  $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ , que l'application

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{C})/GL_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^n/\mathfrak{S}_n$$

$$\mathcal{O}_A \mapsto \text{Spec}(A)$$

est bien définie et bijective.

**Corollaire 36** Le polynôme caractéristique ou le spectre (valeurs propres avec multiplicités) sont des invariants totaux de similitude pour les matrices diagonalisables.

**Remarque 37** C'est faux pour le polynôme minimal (i.e.) en ne considérant que les valeurs propres sans multiplicités comme le montre les matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Proposition 38** Une matrice complexe  $A$  est diagonalisable si et seulement si son orbite  $\mathcal{O}_A$  sous  $GL_n(\mathbb{C})$  est fermée dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**2.2.5 Action de  $GL_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  par congruence [H2G2t1] p.149 → 157**

**Définition 39** On définit l'action de  $GL_n(\mathbb{K})$  sur  $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$  par congruence par

$$GL_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

$$(P, A) \mapsto P.A = PAP^*$$

On dit que deux matrices  $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  sont congrues si elles sont dans la même orbite pour l'action par conjugaison.

**Théorème 40** En notant

$$\mathcal{O}_A = \{B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \mid \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), B = PAP^*\}$$

l'orbite de  $A$  sous l'action de  $GL_n(\mathbb{K})$ , on a :

(i) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , et  $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{C})$  :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \text{rg} A = \text{rg} A'$$

(ii) Théorème de Sylvester : Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , et  $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \text{rg} A = \text{rg} A' \text{ et } \text{sign} A = \text{sign} A'$$

(iii) Si  $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ , et  $A, A' \in \mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)$  inversibles :

$$\mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A'} \Leftrightarrow \delta(A) = \delta(A')$$

où  $\delta(A)$  est le déterminant de  $A$  modulo les carrés de  $\mathbb{F}_q$ .

**Définition 41** (i) Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on pose

$$\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) := \mathcal{O}_{I_n} = \{P^t P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) ; P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})\}$$

$$\text{Stab}(I_n) := \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) = \{P \in \text{GL}_n(\mathbb{R}) \mid P^t P = I_n\}$$

Pour  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , on pose

$$\mathcal{H}_n^{++}(\mathbb{C}) := \mathcal{O}_{I_n} = \{PP^* \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) ; P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$$

$$\text{Stab}(I_n) := U(n) = \{P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}) \mid PP^* = I_n\}$$

### 2.3 Action de groupe et géométrie

**Définition 42** Soit  $\mathcal{E}$  un ensemble et  $E$  un espace vectoriel. On dit que  $\mathcal{E}$  est muni d'une structure d'espace affine de direction  $E$ , si  $(E, +)$  agit transitivement et librement sur  $\mathcal{E}$  en notant

$$E \times \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$(\vec{v}, P) \mapsto t_{\vec{v}}(P) = P \dot{+}_{\text{not}} \vec{v}$$

[GRI] p.387

**Théorème 43** ♠ Soient  $\Delta_4$  le tétraèdre régulier et  $Is(\Delta_4)$  le groupe des isométries préservant  $\Delta_4$ . Alors  $Is(\Delta_4)$  agit sur les sommets du tétraèdre, et on a

$$Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4.$$

La table de caractères de  $\mathfrak{S}_4$  est voir Tableau 1 et Partie 3 ♠ [H2G2t1] p.363-364

## 3 Représentations linéaires de groupes

### 3.1 Définitions et premières propriétés [PEY] p.194 → 205

**Définition 44** Soit  $V$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Une représentation linéaire d'un groupe  $G$  dans  $V$  est la donnée d'un morphisme  $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Ceci correspond à la donnée d'une action linéaire du groupe  $G$  sur  $V$  :

$$G \times V \rightarrow V$$

$$(g, v) \mapsto g.v = \rho(g)(v)$$

Une représentation  $\rho$  est dite fidèle si  $G$  agit fidèlement sur  $V$ .

**Exemple 45** Fort de l'isomorphisme  $Is(\Delta_4) \approx \mathfrak{S}_4$ , on peut établir une représentation du groupe  $\mathfrak{S}_4$  sur l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^3$  comme un groupe de transformations orthogonales.

**Définition 46** • Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux représentations d'un même groupe  $G$  respectivement sur deux  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et  $V'$ . Un

opérateur d'entrelacement est une application linéaire  $\tau : V \rightarrow V'$  tel que pour tout  $g \in G$ ,  $\tau \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \tau$

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V' \\ \rho(g) \downarrow & & \downarrow \rho'(g) \\ V & \xrightarrow{\tau} & V' \end{array}$$

• Deux représentations  $\rho$  et  $\rho'$  d'un même groupe  $G$  respectivement sur deux  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et  $V'$  sont dites isomorphes si  $\tau$  est bijective.

**Définition 47** • Si une représentation  $\rho$  de  $G$  sur  $V$  admet un sous-espace vectoriel  $W \subset V$  stable pour tous les  $\rho(g) \in \text{GL}(V)$ , elle induit une représentation  $\rho_W$  sur  $W$  appelée sous-représentation.

• Une représentation sur un espace  $V$  est dite irréductible si elle admet exactement deux sous-représentations :  $\{0\}$  et  $V$  tout entier.

**Proposition 48** Toute représentation peut s'écrire comme somme de représentations irréductibles.

**Proposition 49** Lemme de Schur :

Soient  $\rho$  et  $\rho'$  deux représentations irréductibles d'un groupe  $G$  respectivement sur deux  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  et  $V'$  et  $f \in \mathcal{L}(V, V')$  un opérateur d'entrelacement. Alors

(i) si  $\rho$  et  $\rho'$  ne sont pas isomorphes,  $f = 0$ .

(ii) Si  $f \neq 0$ , alors  $f$  est un isomorphisme.

Si on suppose  $V = V'$ , alors  $f$  est une homothétie.

### 3.2 Caractères [PEY] p.207 → 226

**Définition 50** Soit  $\rho$  une représentation d'un groupe  $G$  sur un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $n$ .

On lui associe son caractère  $\chi_\rho$  défini par  $\chi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$ , où  $\text{tr}$  désigne la trace.

C'est une fonction de  $G$  dans  $\mathbb{C}$ , (i.e.)  $\chi_\rho \in \mathbb{C}[G]$ .

**Proposition 51** Soient  $\chi_\rho$  et  $\chi_{\rho'}$  deux caractères de représentations irréductibles. Alors

(i)  $\chi_\rho$  est le caractère d'une représentation irréductible si et seulement si

$$\langle \chi_\rho, \chi_\rho \rangle := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g) \overline{\chi_\rho(g)} = 1$$

(ii) Si  $\chi_\rho$  et  $\chi_{\rho'}$  deux caractères de représentations irréductibles non isomorphes, alors  $\langle \chi_\rho, \chi_{\rho'} \rangle = 0$

**Proposition 52** En notant  $(\chi_i)_{i=1}^p$  les caractères irréductibles de  $G$  et  $(C_i)_{i=1}^p$  les classes de conjugaison de  $G$ , on a :

(i) Formule de Burnside :  $\sum_{i=1}^p \chi_i(1)^2 = |G|$

(ii) Orthogonalité des caractères :  $\sum_{i=1}^p \chi_i(C_k) \overline{\chi_i(C_l)} = 0$  pour  $k \neq l$ .

**Définition 53** Une table des caractères est un  $(\chi_i(C_j))_{1 \leq i, j \leq p}$ .  
 tableau constitué des éléments de la matrice

	1	$ C_1 $	$\dots$	$ C_p $
	1	$C_1$	$\dots$	$C_p$
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	$\dots$	1
$\chi_2$	$\chi_2(1)$	$\chi_2(C_2)$	$\dots$	$\chi_2(C_p)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$\chi_p$	$\chi_p(1)$	$\chi_p(C_2)$	$\dots$	$\chi_p(C_p)$

## Illustrations

	$Id$	$\{(1\ 2)\}$	$\{(1\ 2)(3\ 4)\}$	$\{(1\ 2\ 3)\}$	$\{(1\ 2\ 3\ 4)\}$
	1	6	3	8	6
$\chi_1 = \mathbb{1}$	1	1	1	1	1
$\chi_2 = \epsilon$	1	-1	1	1	-1
$\chi_3$	3	1	-1	0	-1
$\chi_4 = \epsilon\chi_3$	3	-1	-1	0	1
$\chi_5$	2	0	2	-1	0

Tableau 1 : La table de caractères de  $\mathfrak{S}_4$

## Questions

---

**Exercice :** 1) Montrer que  $SO_2(\mathbb{R})$  agit transitivement sur le cercle unité de  $\mathbb{R}^2$ .  
2) Montrer que  $SO_3(\mathbb{R})$  agit transitivement sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$ .

---

*Solution :* 1) Soit  $A, B \in \mathbb{R}^2$  deux points du plan. Il nous faut donc trouver un élément  $r \in SO_2(\mathbb{R})$  telle  $r(A) = B$  : il suffit de considérer la rotation de centre  $O$  et d'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

2) Soit  $A, B \in \mathbb{R}^3$  deux points de l'espace. Il nous faut donc trouver un élément  $r \in SO_3(\mathbb{R})$  telle  $r(A) = B$ . Soit  $\mathcal{P}$  le plan passant par  $O, A, B$  et  $d$  la droite perpendiculaire à  $\mathcal{P}$  et passant par  $O$ . Dans ce cas, il nous suffit de considérer la rotation d'axe  $d$  et d'angle  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ .

---

**Exercice :** Un groupe  $G$  à 35 éléments agit sur un ensemble  $X$  à 19 éléments sans fixer aucun d'entre eux. Combien y-a-t-il d'orbites ? Combien d'éléments contiennent-elles ?

---

*Solution :* Rappelons que le cardinal d'une orbite divise le cardinal du groupe et que les orbites forment une partition de l'ensemble  $X$ .

Par conséquent, le cardinal d'une orbite ne peut pas être 1 puisque par hypothèse aucun point n'est fixé et ne peut pas être 35 car une orbite a au maximum 19 éléments. Ce ne peut donc être que 5 ou 7.

Notons  $n$  le nombre d'orbites à 5 éléments et  $m$  le nombre d'orbites à 7 éléments. Les orbites réalisant une réunion disjointe de l'ensemble à 19 éléments, on doit avoir

$$5n + 7m = 19$$

La seule possibilité est  $n = 1$  et  $m = 2$ . Il y a donc 3 orbites, l'une à 5 éléments, les deux autres à 7 éléments.

---

**Exercice :** Démontrer la formule de Burnside :

On suppose  $G$  et  $X$  finis. Alors le nombre d'orbites de  $X$  sous l'action de  $G$ , noté  $\text{Card}(\text{Orb}_X(G))$ , est donné par la formule :

$$\text{Card}(\text{Orb}_X(G)) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g))$$

---

*Solution :* L'idée est d'évaluer de deux manières différentes l'ensemble  $E$  suivant

$$E = \{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$$

en remarquant que

$$(g, x) \in E \Leftrightarrow g \in \text{Stab}(x) \Leftrightarrow x \in \text{Fix}(g)$$

Par conséquent, on a

$$\text{Card}(E) = \sum_{g \in G} \text{Card}(\text{Fix}(g)) = \sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)|$$

Or, on sait que les orbites forment une partition de  $X$ , ainsi on a

$$\sum_{x \in X} |\text{Stab}(x)| = \sum_{\omega} \sum_{x \in \omega} |\text{Stab}(x)| = \sum_{\omega} \sum_{x \in \omega} \frac{|G|}{\text{Card}(\omega)} = |G| \text{Card}(\text{Orb}_X(G))$$