Théorème de Hadamard-Lévy

1 Énoncé et rappels

Soient $n \in \mathbf{N}$ et $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n \in C^2$.
Les deux propositions sont équivalentes :
1. f est un C^1-difféomorphisme de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}^n$.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $D_x f$ est inversible et $||f(x)|| \to +\infty$ lorsque $||x|| \to +\infty$ (on dit que f est coercive).

Rappel 1 (Cauchy-Lisphitz) Si $F : \Omega \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est continue et localement lipschitzienne en la seconde variable (cette condition est notamment vérifiée lorsque $F \in C^1$), alors pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$, il existe une unique solution **maximale** de l'équation différentielle $y' = F(t, y)$ prenant la valeur x_0 en t_0. Cette solution est définie sur un intervalle **ouvert**.

Rappel 2 (sortie de tout compact, cf. Gourdon p.381).
Soit $F :]a, b[\times\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$ continue et localement lipschitzienne en la seconde variable.
Notons $\varphi :]\alpha, \beta[\to \mathbf{R}^n$ la solution maximale d'un problème de Cauchy.
Si $\beta < b$ (resp. $\alpha > a$), alors φ n'est pas bornée au voisinage de β (resp. de α).

Rappel 3 (Cauchy-Lipschitz à paramètre - version simplifiée dont on se servira dans le développement - pas de réf, mais le résultat est vrai, demandez à un EDPiste).

Si $f \in C^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, le problème de Cauchy $\frac{dy}{dt} = f(y, x)$; $y(0) = 0$ admet une unique solution **globale** y_x, alors
$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ $(t, x) \mapsto y_x(t)$ est de classe C^1.

2 Démonstration

Le sens $1 \Rightarrow 2$ est immédiat en remarquant que pour une fonction continue, la coercivité est équivalente au fait que $f^{-1}(compact) = compact$.

Prouvons $2 \Rightarrow 1$. Quitte à remplacer f par $f - f(0)$ on suppose que $f(0) = 0$.

Lemme : il existe $s : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, tel que

$$\forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}^n,\ f \circ s(t, x) = tx \quad (1)$$

Démonstration du lemme : Analyse : supposons s trouvée. Alors s vérifie (1) si et seulement si
$D_{s(t,x)} f \circ \partial_t s(t, x) = x$ et $f \circ s(0, x) = 0$,

si et seulement si $\partial_t s(t, x) = (D_{s(t,x)})^{-1}(x)$ et $s(0, x) \in f^{-1}(\{0\})$.

Donc il *suffit* que pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $s(\cdot, x)$ soit solution du problème de Cauchy autonome suivant :

$$\frac{dy}{dt} = (D_y f)^{-1}(x)\ ;\ y(0) = 0$$

Synthèse : notons $F : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ l'application définie par $(x, y) \mapsto (D_y f)^{-1}(x)$. Montrons que F est de classe C^1.

$\mathbf{R}^n \to L(\mathbf{R}^n); y \mapsto D_y f$ est une application de classe C^1 puisque $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.
$\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n) \to \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$; $l \mapsto l^{-1}$ est une application de classe C^1 (en effet, prendre l'inverse d'une matrice est une fraction rationnelle en les coefficients de la matrice, $A^{-1} =^t com(A)/det(A)$, c'est donc une application C^∞).

Par composition, F est de classe C^1.

En particulier, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, $F(x, \cdot)$ est C^1 donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz le problème de Cauchy admet une unique solution maximale qu'on note $s(\cdot, x)$ définie sur un intervalle ouvert $]t^-(x), t^+(x)[$ contenant 0.

Il se trouve que cette solution est globale. En effet, sinon on aurait, par le principe de sortie de tout compact, $\lim_{t\to t^+(x)} ||s(t,x)|| = +\infty$ d'où, par l'hypothèse de l'énoncé, $\lim_{t\to t^+(x)} ||f\circ s(t,x)|| = +\infty$.
Mais $||f\circ s(t,x)|| = ||tx|| \to t^+(x)||x||$. Donc si $x=0$ on obtient une absurdité et sinon on obtient $t^+(x)=+\infty$. Dans tous les cas la solution est globale (même raisonnement avec $t^-(x)$). On a démontré le lemme.

$\square$

On a vu que F est de classe C^1. On peut donc appliquer le rappel 3 : la fonction $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n,\ (t,x)\mapsto s(t,x)$ est C^1. En particulier la fonction $s_1:\ x\mapsto s(1,x)$ est de classe C^1. Remarquons de plus que pour tout $x\in\mathbf{R}^n$, $f\circ s_1(x)=x$ (*). On a trouvé un inverse à droite pour f :

$$\boxed{f \text{ est donc surjective.}}$$

Pour montrer l'injectivité de f, on va montrer la surjectivité de s_1, en montrant que $s_1(\mathbf{R}^n)$ est ouvert-fermé. La connexité permettra de conclure.

Fermé : Soit $(x_k)_k$ tq. $s_1(x_k)\to y\in\mathbf{R}^n$. par continuité de s_1 il suffit de montrer la convergence de x_k. $f\circ s_1(x_k)=x_k$ et ceci converge vers $f(y)$ par continuité de f. CQFD.

Ouvert : Soit $y\in s_1(\mathbf{R}^n)$. On doit exhiber un voisinage ouvert de y dans $s_1(\mathbf{R}^n)$.
il existe $x\in\mathbf{R}^n$ tel que $y=s_1(x)$. f et s_1 étant C^1 on peut différentier (*), ce qui donne

$$D_{s_1(x)}f\circ D_x s_1 = Id$$

La différentielle de f est inversible en tout point, donc $D_x s_1$ est inversible. Par le théorème d'inversion locale, il existe des ouverts U et V de $\mathbf{R}^n$, tels que $x\in U$ et $y\in V$ pour lesquels $s_1:U\to V$ est un C^1-difféomorphisme. En particulier, on a trouvé un ouvert $V\subset s_1(\mathbf{R}^n)$ qui contient y. CQFD.

Par connexité de $\mathbf{R}^n$, s_1 est surjective, donc f est injective.

f est donc C^1 est bijective, avec $f^{-1}=s_1$ qui est C^1.

Conclusion :

$$\boxed{f \text{ est un } C^1\text{-difféomorphisme.}}$$

3 Remarques

- Le théorème est vrai pour $f\in C^1$ mais la preuve est plus difficile.
- Par rapport au théorème d'inversion locale, on se passe de l'hypothèse de l'injectivité au prix d'une hypothèse sur le comportement de f à l'infini.
- Le cas $n=1$ est élémentaire.
- Leçons concernées : 204, 214, 215, 220.
- Référence : Bernis *40 développements* en modifiant la preuve de l'ouverture de $s_1(\mathbf{R}^n)$.