260 Espérance, variance et moments d'une variable aléatoire.

On considère un espace probabilisé (Ω, F, P). Une variable aléatoire (v.a) sur Ω est une fonction $X : \Omega \to E$ avec E un espace et X-mesurable. Ici, X désignera une v.a à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ où $d \in \mathbb{N}^*$.

I. Espérance et variance d'une v.a

[B] p 53 cf 60

Def ① : • Soit X une v.a.r intégrable. On appelle espérance de X la quantité $\mathbb{E}[X] = \int_\Omega X \, d\mathbb{P}$. X est dite centrée si $\mathbb{E}[X] = 0$

(si Z est une v.a complexe, on écrit $Z = X + iY$ et on définit $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + i\,\mathbb{E}[Y]$.)

• Si $X \in \mathbb{L}^p$, $p > 0$, le moment d'ordre p de X est $\mathbb{E}[X^p] = \int x^p d\mathbb{P}$

le moment centré d'ordre p est $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^p]$.

• Si $X = (X_1 \dots X_d) \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur aléatoire, X est de puissance p-ème intégrable si X_i l'est $\forall i \in [\![1, d]\!]$ ie $\mathbb{E}[\|X\|^p] < +\infty$ ($\|.\|$ euclidienne). Son espérance est $\mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}[X_1], \dots, \mathbb{E}[X_d])$

Ex ② : si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A(X)] = \mathbb{P}(X \in A)$.

Thm ③ (transfert) soit $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ v.a et $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable.

p53

(i) si ϕ positive alors $\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_\Omega \phi \circ X \, d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \, d\mathbb{P}_X(x)$

(ii) $\phi(X) \in \mathbb{L}^1(\Omega) \iff \phi \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et dans ce cas, on a l'égalité

en particulier, si $X \in \mathbb{L}^1(\Omega)$ v.a.r, $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x \, d\mathbb{P}_X(x)$.

Cor ④ : Si X admet pour densité f par rapport à la mesure de Lebesgue, dans les conditions du thm,

$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f(x) \, dx$.

Ex ⑤ : Si X est de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $\mathbb{E}[X] = m$.

• Si X est une v.a discrète ; X à valeur dans un ensemble au plus dénombrable $D = \{x_i, i \in \mathbb{N}\}$. alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \mathbb{P}(X = x_i)$ si $X \in \mathbb{L}^1$.

p60 à 58

Def ⑥ : • soit X une v.a.r $\mathbb{L}^2$. On appelle variance de X la quantité $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

• si $X = (X_1 \dots X_d)$ est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$, on appelle matrice de covariance :

$\mathrm{cov}(X) = \left(\mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i])(X_j - \mathbb{E}[X_j])]\right)_{1 \le i,j \le d}$

Ex ⑦ : • $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ où $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

• si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(m, \mu^2)$ avec $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $\mathrm{cov}((X,Y)) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix}$.

p 59

prop ⑧ : X et Y sont des v.a indep ssi $\forall f$ et g mes tq $f(X), g(X)$ intégrables, $\mathbb{E}[f(X)g(X)] = \mathbb{E}[f(X)]\,\mathbb{E}[g(X)]$

si $X \perp\!\!\!\perp Y$, $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

II. Inégalités remarquables

p58

prop ⑨ : si X intégrable et $t > 0$, $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{t}$

cor ⑩ : (Bienaymé, Tchebitchev) si $X \in \mathbb{L}^2$:

$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}$ $t > 0$

p56

prop ⑪ (Jensen) : si ϕ est convexe sur $\mathbb{R}$ et si X est une v.a.r tq X, $\phi(X)$ sont intégrables, alors

$\phi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\phi(X)]$.

prop ⑫ (Hölder) si $X \in \mathbb{L}^p$, $Y \in \mathbb{L}^q$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ $p, q \geq 1$ alors $\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p}\, \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}$.

[Z] p 508

app 13 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue et $\omega(h) = \sup_h \{ |f(u) - f(v)|, |u-v| \leq h \}$. $\forall n \geq 1$, on considère $B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ le n-ème pol de Bernstein

on a :

(i) $\|f - B_n\|_\infty \leq C\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

(ii) $\exists f$ lipschitzienne tq $\|f - B_n\|_\infty \geq C_0\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

app 14 : soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$ tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$ alors $f \equiv 0$.

cor 15 : $\mathbb{L}^\infty \subset \mathbb{L}^p \subset \mathbb{L}^q \subset \mathbb{L}^1$ $\forall q < p$.

III. Fonctions caractéristiques et génératrices

1) V.a discrète à valeur dans $\mathbb{N}$.

[A] p 160

Def 16 : soit X une v.a à valeur dans $\mathbb{N}$. On définit la fonction génératrice de X : $G(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n$. cette quantité vaut $\mathbb{E}[t^X]$ lorsque la série CVA.

p 161-2

Thm 17 : (i) le RC de $\sum p_n t^n$ vaut au moins 1, G est définie sur $[-1,1]$, $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, G est croissante, convexe sur $[0,1]$

(ii) G caractérise la loi de X

(iii) X est d'espérance fini SSI G est dérivable à gauche en 1 et $\mathbb{E}[X] = G'(1)$

(iv) X admet un moment d'ordre k SSI G est k-fois dérivable à gauche en 1 et alors $G^{(k)}(1) = \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)\cdots(X-k+1)]$.

$\mathbb{V}(X) = G''(1) + G'(1) - G'(1)^2$.

p 172

prop 18 : si X et Y sont deux v.a indep à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

p 109

app 19 : Quelle que soit la façon dont on pipe deux dés, la somme de ~~ses~~ deux dés ne peut pas suivre une loi uniforme sur $\{2, 3, \dots, 12\}$.

Lemme 20 : soit $(X_n)_k$ une suite de v.a indep et identi distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$. soit N une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$, indep des $(X_n)_n$ alors notant $S_N = X_1 + \dots + X_N$ on a : $G_S = G_N \circ G_X$ où X = loi des X_i.

p 155-8

app 21 : (Galton-Watson). On se donne une v.a X discrète à valeur dans $\mathbb{N}$, on note $p_k = \mathbb{P}(X = k)$. Soit $(X_i^n)_{i \in \mathbb{N}^*}^{n \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid de loi $\mathbb{P}_X$, et on pose :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i^n \end{cases}$$

et on suppose les X_i^n $\mathbb{L}^1$, avec $m = \mathbb{E}[X]$

on note $G = G_X = \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n \in \mathbb{N}} p_n t^n$

avec $p_0 > 0$, $0 < p_0 + p_1 < 1$. On s'intéresse à la probabilité d'extinction, on introduit donc $x_n = \mathbb{P}(Z_n = 0)$

On a :

(i) $G_n = G_{Z_n} = \underbrace{G \circ \dots \circ G}_{n\text{-fois}}$

(ii) $(G_n)_n$ converge vers α, plus petit point fixe de G

(iii) $\begin{cases} \alpha = 1 \text{ si } m \leq 1 \\ 0 < \alpha < 1 \text{ si } m > 1 \end{cases}$

(iv) $\mathbb{E}[Z_n] = m^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Rq 22 : On peut utiliser ceci pour modéliser une division cellulaire : $p_2 = p = 1 - p_0$, $\alpha = \min\left(1, \frac{1-p}{p}\right)$.

2) Fonction Caractéristique

[B] p 62

Def 23 : soit X un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^d$, on appelle fonct° caracté de X l'applicat° $\varphi : t \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{E}[e^{i\langle t,x\rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,x\rangle} d\mathbb{P}_X$

p62 **Thm 24** : si X et Y sont des vecteurs aléatoires de lois $\mathbb{P}_X$ et $\mathbb{P}_Y$ tels que $\varphi_X = \varphi_Y$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$.

Ex 25 : si X vecteur aléatoire dans $\mathbb{R}^d$, $\Sigma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $m \in \mathbb{R}^d$, alors $Y = \Sigma X + m$ est un vecteur aléatoire de fct carac $\varphi_Y(t) = e^{i\langle t, m\rangle} \varphi_X({}^t\Sigma t)$

p63 **Thm 26** : si X intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, alors $\mathbb{P}_X$ admet une densité continue et bornée f par rapport à la mes de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ donnée pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par $f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x\rangle} \varphi_X(t)\, dt$.

prop 27 : soit X une v.a.r.

p67 (i) si $\mathbb{E}[|X|^n] < +\infty$ ($X \in \mathbb{L}^n$) alors φ_X est n-fois dérivable et $\varphi^{(k)}(t) = i^k \int x^k e^{itx} d\mathbb{P}_X(x) = i^k \mathbb{E}[X^k e^{itX}]$ et $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}[X^k]$

(ii) si n est pair et si φ est n-fois dérivable en 0, alors X admet tout moment d'ordre $\leq n$.

Rq 28 : si φ_X est analytique, alors P_X est caractérisé par ses moments ; ceci a lieu lorsque par exemple $\mathbb{E}[e^{\alpha|X|}] < +\infty$ pour un $\alpha > 0$

Thm 29 : (des moments) Soient X, Y des v.a.r bornées. si $\mathbb{E}[X^k] = \mathbb{E}[Y^k]$ $\forall k \in \mathbb{N}$, alors X et Y ont même loi

app 30 : Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors X admet des moments à tout ordre et $\mathbb{E}[X^{2k+1}] = 0$, $\mathbb{E}[X^{2k}] = 1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times 2k-1$

IV. Théorèmes limites

Thm 31 : (LFGN $\mathbb{L}^2$) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r de carré intégrable, 2 à 2 non corrélées telles que $\sup_n \mathrm{Var}(X_n)$ fini, si $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, alors $\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n} \xrightarrow[n]{p.s} 0$ [G] p ?

Rq 32 : Ce résultat est vrai si les X_i sont iid et intégrables seulement.

Thm 33 : Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires iid admettant une variance finie $\sigma^2 > 0$. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. alors $S_n^* = \frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. + p 239

app 34 : (Stirling) $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ p 497

DVP : ① Polynômes de Bernstein [13]
② G-W [21]

Références : [A] : Appel (Proba pour non p....)
[B] : Barbe Ledoux (Probas)
[G] : Garet et Kurtzman
[Z] : Zuily Queffelec [13]

Loi	$X(\Omega)$	$\mathbb{P}(X=k)$ / densité	$\mathbb{E}[X]$	$Var(X)$	$G(t)$	$\varphi(t)$
Bernoulli	$\{0,1\}$	$p_1 = p$ $p_0 = 1-p$	p	$p(1-p)$	$1-p+pt$	$1-p+pe^{it}$
$\mathcal{B}(n,p)$	$[\![1,n]\!]$	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$(1-p+pt)^n$	$(1-p+pe^{it})^n$
$\mathcal{G}(p)$	$\mathbb{N}^*$	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pt}{1-(1-p)t}$	$\frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$
$\mathcal{P}(\lambda)$	$\mathbb{N}$	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$e^{\lambda(t-1)}$	$e^{\lambda(e^{it}-1)}$
$\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	m	σ^2	—	$e^{imt} e^{-\sigma^2 \frac{t^2}{2}}$
$\mathcal{E}(\alpha)$	$\mathbb{R}^+$	$\alpha e^{-\alpha x}$	$\frac{1}{\alpha}$	$\frac{1}{\alpha^2}$	—	$\frac{1}{1-\frac{it}{\alpha}}$