243 Convergence des séries entières. Propriétés de la somme. Ex et applications

Dans cette leçon, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

I. Rayon de convergence

ELA p229

Def ① : On appelle série entière (complexe de la variable complexe) toute série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto a_n z^n$ avec $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

. Lorsque cela a un sens, on définit la somme de la série entière comme l'application $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

p230

Lemme ② (Abel) : soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $(a_n z_0^n)_n$ soit bornée. alors $\forall z \in D(0, |z_0|)$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument

p230

Def-Thm ③ : il existe un unique nombre $R \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que :
(i) si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument
(ii) si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ diverge

ce réel est $R = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+, (a_n r^n)_n \text{ est bornée} \}$ et il est appelé rayon de convergence de la série entière.
le disque ouvert $D(0,R)$ est appelé disque de convergence de la série.

p231

Rq ④ : on ne connait pas le comportement de la série sur $\mathcal{C}(0,R)$:

- la série $\sum z^n$ est de rayon de convergence 1, mais diverge $\forall z \in \mathcal{C}(0,1)$
- $\sum \frac{z^n}{n^2}$ est de rayon de convergence 1, et converge $\forall z$ sur $\mathcal{C}(0,1)$

p232

prop ⑤ (Règle de D'Alembert) : soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. si la suite $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ converge vers $L \in \overline{\mathbb{R}_+}$, alors $R = \frac{1}{L}$ (avec par convention $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{0} = +\infty$).

Ex ⑥ : . La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence de $+\infty$, on note $\exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

. on ne peut rien dire avec ce critère sur la série $\sum (2 + (-1)^n) z^n$.

p233

Thm ⑦ (Formule de Hadamard). le rayon de converge R de $\sum a_n z^n$ est $R = \dfrac{1}{\limsup_{n \to \infty} |a_n|^{1/n}}$

prop ⑧ : (i) si $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq |b_n|$, où $\sum a_n z^n$ est une série de rayon de convergence R_a, $\sum b_n z^n$ a pour rayon de convergence R_b, alors $R_a \geq R_b$

p234

(ii) si $a_n = O(b_n)$ alors $R_a \geq R_b$
(iii) si $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ alors $R_a = R_b$

application ⑨ : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière tq $a_n = F(n)$ $\forall n$ où F est une fraction rationnelle non nulle. Alors le rayon de c de la série est 1.

II. Opération sur les séries entières

p236

Def ⑩ : si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières de rayon de conv $R_a > 0$ et $R_b > 0$.
(i) la série somme est $\sum (a_n + b_n) z^n$ de RC $R \geq \min(R_a, R_b)$ (égalité si $R_a \neq R_b$)

(ii) La série produit (produit de Cauchy) est la série entière $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ de RC $R \geq \min(R_a, R_b)$

on définit aussi la multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, la série $\lambda \sum a_n z^n$ ou $\sum (\lambda a_n) z^n$ de RC $= R_a$

De plus, on a égalité des somme sur le disque de conv.

p103 **Ex 11** : • si $z, z' \in \mathbb{C}$ $\exp(z+z') = \exp(z)\exp(z')$

p234 • $\sum z^n$ et $\sum -z^n$ sont de RC 1 mais $\sum z^n + \sum -z^n$ est de RC $+\infty$

• si $a_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n=0 \\ 2^n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ $\quad b_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n=0 \\ 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$ alors

$R_a = \frac{1}{2}$ $\quad R_b = 1$ et $\quad \sum c_n z^n = 0$ de RC $+\infty$.

III. Propriétés de la fonction somme

p238 **Thm 12** : Une série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de son disque de convergence.

p239 **coro 13** : si $\sum a_n z^n$ a pour RC $R > 0$ alors $S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est continue sur $D(0,R)$.

p240 **coro 14** : la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $x \in]-R,R[$ admet des primitives de la forme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{C}$.

p237 **prop 15** : si $\sum a_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence R, alors la série (dérivée) $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ a le même rayon de convergence que celle-ci.

p240 **coro 16** : si $\sum a_n x^n$ est une série entière de RC ; R alors S est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et de plus

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{k!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ x \in]-R,R[$$

et $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$

Ex 17 : • $x \in \mathbb{R} \to \exp(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. p242

• $\forall x \in]-1,1[$ $\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$

IV. Fonction développables en série entière

On considère ici des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.

Def 18 : • une fonction $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est développable en série entière s'il existe une série entière en 0 $\sum a_n x^n$ de RC $R > 0$ et $r \in]0,R[$ tq $]-r,r[\subset X$ et $\forall x \in]-r,r[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. p241

• elle est développable en série entière en x_0 si $x \mapsto f(x - x_0)$ l'est en 0.

prop 19 : si f est dvp en SE en x_0, alors sur un voisinage de x_0, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et son développement est $\sum \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ p242

ceci montre l'unicité du développement en série entière.

Ex 20 : • la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$, mais n'est pas développable en SE p250

• $\forall x \in]-1,1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

• $\forall x \in]-1,1[$, $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

GOU p 250

• $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \quad \forall x \in]-1,1[$.

Thm ㉑ : (Théorème d'Abel) : soit $\sum a_n z^n$ une série de RC ≥ 1 tq $\sum a_n$ converge. on note f la somme de cette série sur $D(0,1)$. Soit $\theta_0 \in [0, \frac{\pi}{2}[$, on pose $\Delta_{\theta_0} = \{ z \in \mathbb{C}, |z|<1$ et $z = 1-\rho e^{i\theta}, \rho>0, \theta \in]-\theta_0, \theta_0[\}$ alors

$$\lim_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n .$$

application ㉒ : (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \log(2)$

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$

(iii) si $\sum a_n$ converge $\sum b_n$ converge et $\sum c_n$ converge où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, alors $\sum_{n\geq 0} a_n \sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n\geq 0} c_n$.

GOU p 251

Thm ㉓ (Taubérien faible) : soit $\sum a_n z^n$, une série entière de rayon de conv 1 et $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \forall z \in B(0,1)$. On suppose que $\exists S \in \mathbb{C}$, $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = S$ et que $a_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\sum a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

V. Fonctions analytiques

BOST p 17

Def ㉔ : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est analytique si $\forall a \in \Omega$, $\exists r>0$ et une série entière $\sum a_n z^n$ de RC $\geq r$ tq $B(a,r) \subset \Omega$ et $\forall z \in B(a,r)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

prop ㉕ : la somme d'une série entière de RC $\rho > 0$ est analytique sur $B(0,\rho)$. p 17

Thm ㉖ : (Formule de Cauchy) Soit f une fonction holomorphe sur Ω ouvert de $\mathbb{C}$ (i.e $\mathbb{C}$-dérivable). Soit $a \in \Omega$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\overline{B}(a,r) \subset \Omega$. Alors $\forall z \in B(a,r)$, $f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$ p 24

coro ㉗ : soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ alors, f holomorphe SSI f analytique

application ㉘ : • $z \overset{\in \mathbb{C}}{\longmapsto} \exp(z)$ est holomorphe donc $\mathcal{C}^\infty$ et de plus $\exp'(z) = \exp(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Coro ㉙ : sous les mêmes hypothèses que le thm ㉖, on a $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \quad \forall z \in B(a,r)$ p 25

où $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$ p 26

en particulier, $\left| \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \right| \leq r^{-n} \max_{\theta \in [0,2\pi]} |f(a+re^{i\theta})|$

application ㉚ : (thm de Liouville) : une fonction entière bornée (ie f est dvp en SE de RC $+\infty$), alors f est constante p 27

application ㉛ : $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Ref: [BOST] : Bost (Fonctions analytiques d'une variable complexe) (Partie V)
[GOU] : Gourdon (Analyse) (Thm ABP [21] et [23]
[ELA] : El Amrani (Suites et Séries numériques, Suites et Séries de fonctions) (80%)