230 | Série de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples

$\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $(u_n)_n$ une suite de $\mathbb{K}$.

I. Généralités

Def ①: On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ appelée somme partielle d'ordre n. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ notée $\sum u_n$.

La série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_n)_n$ converge. Dans ce cas, on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ cette limite appelée somme de la série. On note alors $R_n = S - S_n$ appelé reste.

Ex ②: si $a \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$ si $a \neq 1$ et la série $\sum a^n$ converge SSI $|a|<1$.

prop ③: si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ la réciproque est fausse ($\sum \ln(1+\frac{1}{n})$).

Def ④: Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ converge. (on note ACV)

Rq ⑤: $\sum u_n$ ACV $\Rightarrow$ $\sum u_n$ CV mais la réciproque est fausse: $u_{2p} = -\frac{1}{p}$ $u_{2p+1} = \frac{1}{p}$ $p \in \mathbb{N}^*$. (on dit qu'elle est semi-convergente.

II. Séries à termes positifs

ici $(u_n)_n \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$.

Lemme ⑥: $\sum u_n$ converge SSI $(S_n)_n$ est majorée. (sinon, $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$)

1) Règle de comparaison

Thm ⑦: si $v_n \geq 0\ \forall n$ et $u_n \leq v_n\ \forall n \geq 0$, alors
(i) si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ aussi et $\sum_{n\geq 0} u_n \leq \sum_{n\geq 0} v_n$
(ii) si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ aussi.

Ex ⑧: $\forall n \geq 2$, $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ donc $\sum \frac{1}{n^2}$ converge

$\forall n \geq 1$ $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ donc $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge

Thm ⑨: si $u_n, v_n \geq 0\ \forall n$ et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ alors:
(i) les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature
(ii) en cas de convergence, les restes sont équivalents
(iii) en cas de divergence, les sommes partielles sont équivalentes.

Ex ⑩: (série de Riemann) $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ converge SSI $\alpha > 1$.

cor ⑪: si $n^\alpha u_n$ converge vers 0 et $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge
si $n^\alpha u_n$ tend vers $+\infty$ et $\alpha \leq 1$, $\sum u_n$ diverge

Thm ⑫: si $u_n, v_n \geq 0\ \forall n$ et $u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$.
Si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge aussi, et dans ce cas $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ et $\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$ vérifient $R_n = O(\rho_n)$

si $u_n = o(v_n)$, on a $\sum v_n$ CV $\Rightarrow$ $\sum u_n$ cv et $R_n = o(\rho_n)$

app ⑬: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on considère $u_n = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{n}}{n!}$.
on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} k$ d'où $n! \sim k\, n^n e^{-n}\sqrt{n}$ ($k = \sqrt{2\pi}$).

DVP 1

2) Comparaison séries - intégrales

Thm 14 : soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ positive décroissante. alors $\sum f(n)$ avec $(n \geq a)$ et l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ ont même nature. En cas de convergence, on a : $\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$

app 15 : soit $\alpha > 1$. $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$

app 16 (développement assymptotique de la série harmonique) on note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ $\forall n \geq 1$, on a $H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où $\gamma > 0$ (constante d'Euler)

prop 17 (Série de Bertrand) $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ converge SSI $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

III. Séries de nombres complexes $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

1) Règle de Cauchy et D'Alembert

Thm 18 : soit $L = \limsup \sqrt[n]{|u_n|}$ alors :
(i) si $L < 1$, $\sum u_n$ converge absolument
(ii) si $L > 1$, $\sum u_n$ diverge

Ex 19 : $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ converge

Thm 20 : si $u_n \neq 0$ $\forall n \geq N \in \mathbb{N}^*$. on note $L = \limsup \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et $l = \liminf \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$

(i) si $L < 1$ $\sum u_n$ ACV
(ii) si $l > 1$, $\sum u_n$ diverge

Ex 21 : $u_n = \frac{a^n}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$.
$\sum u_n$ CV SSI $a < 1$

2) Produit de Cauchy

Thm 22 : si $\sum a_p$ et $\sum b_p$ convergent absolument, alors $\sum c_n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ est appelée produit de Cauchy de $\sum a_p$ et $\sum b_q$, elle est ACV et
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} b_q\right)$$

app 23 : $\forall z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Rq 24 : si l'une des deux séries seulement est ACV, alors $\sum c_n$ converge et a pour somme le produit des sommes.

Thm 25 : (sommation par paquet) si I_n est une partition de $\mathbb{N}$ et $\sum u_n$ ACV, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{i \in I_k} u_i\right)$.

3) Séries alternée et théorème d'Abel

Thm 26 : Soit $(a_n)_n$ une suite à termes positifs, décroissante tendant vers 0. Alors $\sum (-1)^n a_n$ converge et $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k \geq n+1} (-1)^k a_k$ vérifie $|R_n| \leq a_{n+1}$

Thm 27 (Règle d'Abel) : si $\forall n$, $u_n = \alpha_n v_n$ où
- $(\alpha_n)_n$ est une suite positive, décroissante qui tend vers 0
- $\sum v_n$ est bornée

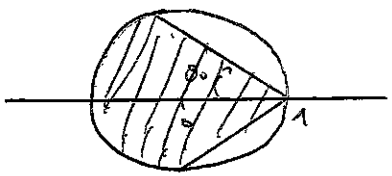
alors $\sum u_n$ converge

Ex 28 :
- si $(\alpha_n)_n$ décroissante et tend vers 0 et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. $\sum \alpha_n e^{in\theta}$ converge.
- on retrouve 26 avec $\alpha_n = a_n$, et $v_n = (-1)^n$.

Thm 29 : (Abel angulaire) soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ≥ 1, tq $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur $D(0,1)$.
Soit $\theta_0 \in [0, \pi/2[$ et $\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \,/\, \exists \rho > 0, \theta \in [-\theta_0, \theta_0]$ tq $z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$

DVP 2

alors : $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$



Rq 30 : la réciproque est fausse : $\lim\limits_{\substack{z \to 1 \\ |z| < 1}} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{2}$ et $\sum (-1)^n$ diverge.

Thm 31 (Taubérien faible) : si $\sum a_n z^n$ a pour R $(R \geq 1)$ et f la somme de cette série sur $D(0,1)$, on suppose que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = S$ et $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge et est de somme S

app 32 : si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent et $\sum c_n$ converge où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ alors $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} c_n$.

DVP 2

Développements :
1 : Série harmonique [16] [15]
2 : Abel angulaire [29] et [32]