204 Connexité. Exemple et Application.

Dans cette leçon, (X,d) désigne un espace métrique

I. Définition et premières propriétés.

Q p105 **Prop-Def ①** : On a équivalence entre.

(i) si $A \subset X$ et A ouvert, fermé, alors $A = \emptyset$ ou $A = X$

(ii) toute application continue $\varphi : X \to \mathbb{Z}$ est constante

si X vérifie l'une de ces propriétés, X est dit connexe.

p106 **Def ②** : Soit $Y \subset X$, alors Y est connexe dans X si il l'est pour la métrique induite par X sur Y, i.e

$Y \subset \omega_1 \cup \omega_2$, ω_j ouverts de X et $\omega_1 \cap \omega_2 \cap Y = \emptyset$ $\Rightarrow \omega_1 \cap Y = \emptyset$ ou $\omega_2 \cap Y = \emptyset$.

p107 **Ex ③** : • Un singleton est toujours connexe
• $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe dans $\mathbb{R}$. GOU p38

Thm ④ : $[0,1]$ est connexe dans $\mathbb{R}$.

Thm ⑤ : • Soit $(A_i)_{i\in I}$ ~~des~~ connexes de X tq $\bigcap_I A_i \neq \emptyset$. alors $\bigcup_I A_i$ est connexe.

• si $A_1, \dots, A_n$ sont connexes tels que $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ si $i \leq n-1$ alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est connexe.

Ex ⑥ : une intersection de connexes n'est pas forcément connexe : $\mathcal{C}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \cap [0,1] = \{0, 1\}$.

p108 **Thm ⑦** : (i) Soit f une application continue de X dans Y, si X est connexe, alors $f(X)$ également

(ii) si $A \subset X$ est connexe et $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe

coro ⑧ : soit $A \subset \mathbb{R}$, A est connexe $\Leftrightarrow$ A est un intervalle p112

app ⑨ : (DEV 1). Soit X un espace métrique compact, et $(x_n)_n$ une suite de point de X telle que $d(x_n, x_{n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors l'ensemble des valeurs d'adhérences de $(x_n)_n$ est connexe.

• si $f : [0,1] \to [0,1]$ est continue, on considère la suite $(x_n)_n$ définie par $x_0 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n)$; on suppose que $|x_{n+1} - x_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $(x_n)_n$ converge. p134 IV.2 GOU p45

Thm ⑩ (TVI) : Soit X un espace connexe et $f : X \to \mathbb{R}$ continue, si f prend deux valeurs α et β, elle prend toute valeur intermédiaire $\alpha \leq \gamma \leq \beta$ p112

app ⑪ (Brouwer en dim 1) : Toute fonction continue $f : [a,b] \to [a,b]$ possède un point fixe.

Ex ⑫ : $GL_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe

prop ⑬ : si $(X_i)_{i\in I}$ sont connexes, alors $\prod_{i\in I} X_i$ aussi

II. Connexité par arcs

Def ⑭ : un espace métrique X est dit connexe par arcs si $\forall\, a,b \in X$, il existe $\Gamma : [0,1] \to X$ tel que Γ continue ; $\Gamma(0) = a$, $\Gamma(1) = 1$ p109

Thm ⑮ : Si X est connexe par arc, alors X est connexe

si X est un ouvert d'un evn E et X connexe, alors X est connexe par arc.

Ex 16 : . $GL_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs $(n \geq 1)$

- Un convexe est connexe par arcs.
- soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, $X = \{(x,y), y > f(x)\}$ alors X est connexe par arcs.
- $SL_n(\mathbb{C})$ et $SL_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs, $SO_n(\mathbb{R})$ aussi.
- la partie $P = \{(x,0), x \in]0,1]\} \cup \bigcup_{n \geq 1} \{(\frac{1}{n}, y), y \in [0,1]\}$ et l'adhérence $\bar{P}$ de P dans $\mathbb{R}^2$. Alors $\tilde{P} = \bar{P} \setminus \{(0,1)\}$ est connexe, non connexe par arcs

III. Composantes connexes

p115 **Def 17** : On définit une relation d'équivalence sur X par $x \sim y \iff \exists\, C$ connexe de X, x et $y \in C$. Les classes d'équivalences sont les composantes connexes de X, on note $C(x)$ la composante connexe de x.

prop 18 : (i) $C(x)$ est la réunion de tous les connexes contenant x

(ii) $C(x)$ est fermé dans X

p116 **app 19** : Un ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion au plus dénombrable d'intervalles disjoints, ouverts de $\mathbb{R}$.

p113 **prop 20** : si $X = \bigsqcup_I w_i$ où les w_i sont ouverts connexes non vides, alors les w_i sont les composantes connexes de X.

p117 **Ex 21** : $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

$G^+ = \{A, \det(A) > 0\}$ et $G^- = \{A, \det(A) < 0\}$

IV Utilisation de la connexité.

1) En Algèbre

[BA] **Thm 22** (DEV 1) l'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

Def 23 : Un groupe topologique est un groupe munit d'une topologie séparée pour laquelle $g \to g^{-1}$ et $(g, g') \to gg'$ sont continues.

[N] p12 **Lemme 24** : Soit G un groupe topologique connexe et H un sous-groupe ouvert de G, alors $H = G$

app 25 : $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est surjective

p14 **prop 26** : Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $n \geq 2$, Alors H contient une matrice inversible

2) En calcul différentiel

prop 27 : soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable avec $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe, tq $d_xf = 0$ $\forall x \in U$, alors f est constante

Thm 28 (Brouwer en dim 2) : soit B une boule fermé de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ alors : tout application $f : B \to B$ possède un point fixe

Thm 29 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et localement lipschitzienne en la deuxième variable ; soient y_1 et y_2 deux solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$. si y_1, y_2 sont égales en un point de I, elles le sont partout.

[F] p 13

3) En Analyse Complexe

ici, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{C}$.

p 126

Thm 30 : soient $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe et E une partie de Ω ayant un point d'accumulation, si Ω est connexe, $f_{|E} = g_{|E} \Rightarrow f = g$

app 31 : $\forall p \in]0,1[$, on a $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\sin \pi p}$.
on peut donc prolonger Γ à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}_-$ (connexe) où $\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définie sur $\{\mathrm{Re}(z) > 0\}$.

prop 32 : $\mathbb{C}^*$ est un connexe de $\mathbb{C}$.

app 33 : il n'existe pas de fonction continue $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $g(z)^2 = z$.

[Q] p 171

Def 34 : $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dit sous-harmonique si f est continue et $\forall a \in \Omega$, $\exists \bar{D}(a, r_a) \subset \Omega$ tq $\forall r \in [0, r_0]$, $f(a) \leq \dfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$.

Thm 35 : soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ avec Ω borné ; f sous-harmonique sur Ω, continue sur $\bar{\Omega}$ alors $\sup_{\bar{\Omega}} f = \sup_{\partial\Omega} f$, et donc $\forall z \in \Omega$, $f(z) \leq \sup_{\partial\Omega} f$

(Q) : Queffélec (Topologie)
(ZA) : Zavidovique (un max de maths)
(N) : Nourdin
(Gou) : Gourdon (Analyse)