170 Forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Isotropie. Application

$\mathbb{K}$ désigne un corps de caractéristique $\neq 2$ et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $(e_i)_{i=1}^n$ une base de E

I. Définitions et premières propriétés.

(GR3 p293) **Def ①** : Une application $q : E \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique (FQ) si étant donnée une base $(e_i)_{i=1}^n$ de E, $q(x)$ est un polynôme homogène de degré 2 en les composantes x_i dans $(e_i)_{i=1}^n$. Cette définition ne dépend pas du choix de la base

Ex ② : $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,
$(x_1, x_2, x_3) \mapsto 2x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 3x_1x_3 + 5x_2x_3$

(p295) **Def ③** : une forme bilinéaire symé (FBS) sur E est une applicat° $b : E \times E \to \mathbb{K}$, linéaire en les 2 variables tq $\forall x, y \in E$ $b(x,y) = b(y,x)$. On note $\Pi = (b(e_i, e_j))_{i,j}$ la matrice de b dans la base $(e_i)_i$.

prop ④ : si b est une FBS, alors $\forall x, y \in E$, $b(x,y) = {}^t x \Pi y$

(p300) **Thm ⑤** : (i) soit b une FBS et soit $q : E \to \mathbb{K}$, $x \mapsto b(x,x)$. Alors q est une FQ

(ii) si q est une FQ, il existe une unique FBS φ tq $q(x) = \varphi(x,x)$ $\forall x \in E$ et $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}\left(q(x+y) - q(x) - q(y)\right)$.

φ est alors appelée forme polaire de q.

Ex ⑥ : $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ sur $\mathbb{R}^2$. $\varphi(x) = x_1y_1 - x_2y_2$

(p302 p297) **Def ⑦** : On appelle rang, noyau, matrice d'une FQ le rang, le noyau, la matrice de la FBS associée ($rg(\varphi) = rg(\Pi)$, $N(q) = N(\varphi) = \{x \in E, b(x,y) = 0 \ \forall y \in E\} = \ker(\Pi)$)

q est non dégénérée SSI Π est inversible SSI $b(x,y) = 0$ $\forall y \in E \Rightarrow x = 0$

(p296) **prop ⑦'** : si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ sont des bases de E, Π et Π' les matrices de φ ds $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, alors si P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, on a $\Pi' = {}^tP \Pi P$

II. Orthogonalité et isotropie

(p314) **Def ⑧** : • deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthogonaux pour q (ou φ) si : $\varphi(x,y) = 0$ (on note $x \perp_\varphi y$).

• si A est une partie de E, on appelle orthogonal de A pour φ l'ensemble $A^\perp = \{x \in E, \varphi(x,a) = 0 \ \forall a \in A\}$

prop ⑨ : (i) $A^\perp$ est un sev de E.

(ii) $E^\perp = N(q)$

(iii) si F sev de E, on a $\dim(E) = \dim(F) + \dim F^\perp - \dim(F \cap N)$ et $F^{\perp\perp} = F + N$ où $N = N(q)$.

(p303) **Def ⑩** : On appelle cône isotrope l'ensemble $C(q) = \{x \in E$ tq $q(x) = 0\}$. On dit que q est définie si $C(q) = \{0\}$

Ex ⑪ : • $q(x) = x_1^2 - x_2^2$, $C(q) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y = \pm x\}$

• $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ $C(q) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 = z^2\}$

Rq ⑫ : $N(q) \subset C(q)$ Mais la réciproque n'est pas vraie en général : $q(x) = x_1^2 - x_2^2$, $x = (1,1) \in C(q)$ mais $\varphi((1,1),(1,0)) = 1 \neq 0$ donc $(1,1) \notin N(q)$.

En particulier, q définie $\boxed{\Rightarrow}$ q non dégénérée.

Def ⑬ : Un sev F de E est isotrope si : $F \cap F^\perp \neq \{0\}$

(p312) **prop ⑭** : • Il existe des sous-espaces isotropes SSI $C(q) \neq \{0\}$.

• $E = F \oplus F^\perp \Leftrightarrow F$ est non isotrope.

• $E = F \oplus F^\perp = E \Leftrightarrow q_{|F}$ est non dégénérée.

②

II. Bases orthogonales et Réduction.

p304 **Def (15)** : Une base $(e_i)_i$ de E est dit orthogonale pour une FBS φ si $\varphi(e_i, e_j) = 0 \quad \forall i \neq j$. Elle est orthonormée si $\varphi(e_i, e_j) = \delta_{ij}$.

Rq (16) : $(e_i)_i$ est une BO SSI $M = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$ SSI $q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_n x_n^2$.

p305 **Thm (17)** : si $E \neq \{0\}$, il existe des bases orthogonales pour q.

(G) p252 **cor (18)** : q s'écrit comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes, que l'on peut calculer par la méthode de Gauss.

mieux p308 p255 **Ex (19)** : $q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3$

$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 2x_3)^2 + x_3^2.$$

dont une BOG pour q est $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Thm (20) : $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et q FQ sur E. Il existe une base $(e_i)_i$ telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_r^2 \quad (r = rg(q))$

ie $M_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)$

donc $\exists$ une BON SSI q est non dégénérée.

p309 **Thm (21)** : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et q FQ sur E, alors il existe une base $(e_i)_i$ telle que si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$

ie $M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}$. $(p, r-p)$ est appelé signature de q et $r = rg(q)$.

et q non dégénérée $\Leftrightarrow$ $sign(q) = (p, n-p)$.

Thm (22) : $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$ où $2 \nmid q$ et q une FQ non dégénérée sur E. Soit ξ un non carré de $\mathbb{F}_q^*$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice réduite modulo les carrés de $\mathbb{F}_p$ est $M_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ & & & \varepsilon_n \end{pmatrix}$ où $\varepsilon_n = 1$ ou ξ. NH2G2 p258 FGN3 pour preuve p217

III. Applications

1) Réciprocité quadratique

Def (23) : Pour p premier impair, et $a \in \mathbb{F}_p$, on définit le symbole de Legendre de a par :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ -1 & \text{si } a \text{ n'est pas un carré dans } \mathbb{F}_p^* \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = a^{\frac{p-1}{2}}$$

Lemme (24) : $|\{x \in \mathbb{F}_p,\ ax^2 = 1\}| = 1 + \left(\frac{a}{p}\right)$.

NH2G2 **Thm (25)** : Soient p et q deux nombres premiers impairs distincts. Alors :

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}}$$

Def (26) : On appelle discriminant de M sont déterminant modulo les carrés de $\mathbb{F}_p$ noté $\delta(M)$.

coro (27) : On considère l'action par congruence de $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)$: $A \cdot M \longrightarrow AM{}^tA$. On a : $Orb(M) = Orb(M') \Leftrightarrow \delta(M) = \delta(M')$

GOU p 230

2) Cas réel. ici, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Def 28 : • q est positive si $\forall x \in E$, $q(x) \geq 0$
• q est négative si $\forall x \in E$, $q(x) \leq 0$.

Thm 29 : (Inégalité de Schwarz) : si q positive, alors $\forall (x,y) \in E^2$ $|\varphi(x,y)|^2 \leq q(x)q(y)$. Si de plus q est définie, il y a égalité SSI x et y sont liés.

cor 30 : $N(q) = C(q)$ si q est positive, ainsi, q non dégénérée $\Leftrightarrow$ q définie.

app 31 : (réduction des endomorphismes autoadjoints)
Soit E munit d'une FBS définie positive (ie euclidien). Alors si $f \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint. Alors il existe une BON de vecteurs propres pour f, et ses v.p sont réelles.

Ex 11