159 Formes linéaires et dualité en dimension finie. Exemples et applications

p129 p132 (G) p126

$\mathbb{K}$ est un corps et E $\mathbb{K}$-ev de dim finie n

I. Espace dual et bidual

1) Forme linéaire

Def ① : Une forme linéaire sur E, est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$, on note E^* l'ensemble des fl de E appelé dual de E. si $\varphi \in E^*$, on notera parfois $\varphi(x) = \langle \varphi, x \rangle$ $\forall x \in E$

Ex ② : • $tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ $\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
• $(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{K}^n \to x_i$ $\in (\mathbb{K}^n)^*$.

Thm ③ : soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$. $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tq $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $f(X) = tr(AX)$. $\left(\begin{array}{l} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A \mapsto (M \mapsto tr(AM)) \end{array} \right.$ est un isomorphisme $)$

cor ④ : soit $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^*$ tq $f(XY) = f(YX)$ $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, $f = \lambda\, tr$. (+appli NH2G2 p 313 + 376)

prop ⑤ : Soit H hyperplan de E (ie un sev de dim $n-1$) alors H est le noyau d'une forme linéaire.

2) Base duale

Def ⑥ : soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, on note $\forall i$ e_i^* tq $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ $\in E^*$ appelées formes linéaires coordonnée.

Thm ⑦ : $\mathcal{B}^* = (e_1^* \dots e_n^*)$ est une base de E^* appelée base duale de $\mathcal{B}_n$. En particulier $\dim(E^*) = \dim(E)$ et $\forall \varphi \in E^*$, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$

Rq ⑦' : l'isom de E dans E^* qui envoie e_i sur e_i^* dépend de la base.

3) Bidual

Def ⑧ : On appelle bidual de E l'ev $(E^*)^*$ noté E^{**}

Thm ⑨ : l'application $\varphi : \begin{array}{l} E \to E^{**} \\ x \mapsto ev_x : \varphi \in E^* \mapsto \varphi(x) \end{array}$ est un isomorphisme. Cet isomorphisme est canonique : il ne dépend pas du choix d'une base.

prop ⑩ : Soit $f_1 \dots f_n$ une base de E^*. Il existe une unique base $(e_1 \dots e_n)$ de E tq $e_i^* = f_i$ $\forall i$. On l'appelle base antéduale de $(f_1 \dots f_n)$

app ⑪ : Soient $a_0 \dots a_n \in \mathbb{K}$ $\exists!$ famille $(L_i)_{i=0}^{n}$ de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que $L_i(a_j) = \delta_{ij}$ $\forall i, j$. on les appelle les polynômes interpolateurs de Lagrange.

II. Orthogonalité

p128

Def ⑫ : • $x \in E$ et $\varphi \in E^*$ sont dit orthogonaux si $\langle \varphi, x \rangle = 0$
• si $A \subset E$, on note $A^\perp = \{ \varphi \in E^*, \forall x \in A, \varphi(x) = 0 \}$ orthogonal de A
• si $B \subset E^*$ on note $B^\circ = \{ x \in E, \forall \varphi \in B, \varphi(x) = 0 \}$ orthogonal de B
(si $B = \{\varphi\}$, $B^\circ = \ker(\varphi)$)

prop ⑬ : si $A \subset E$, $B \subset E^*$, $A^\perp$, B° sont des sev et
(i) $A_1 \subset A_2 \subset E \Rightarrow A_2^\perp \subset A_1^\perp$
(ii) $B_1 \subset B_2 \subset E^* \Rightarrow B_2^\circ \subset B_1^\circ$
(iii) $A^\perp = \mathrm{vect}(A)^\perp$
(iv) $B^\circ = \mathrm{vect}(B)^\circ$

Thm (14) : Soit E $\mathbb{K}$-ev de dim finie, alors

(i) si F sev de E, $\dim(F) + \dim(F^\perp) = \dim(E)$ et $F^{\perp\circ} = F$

(ii) si G sev de E^*, $\dim(G) + \dim(G^\circ) = \dim(E)$ et $G^{\circ\perp} = G$

Cor (15) : Soit E $\mathbb{K}$-ev de dim finie n.

(i) soient p formes linéaires $\varphi_1 \dots \varphi_p$ de E^* tq $rg(\varphi_1 \dots \varphi_p) = r$. alors $F = \{x \in E, \forall i\ \varphi_i(x) = 0\}$ est de dim $n-r$

(ii) si F est un sev de dim q, il existe $n-q$ formes linéairement indépendante $\varphi_1 \dots \varphi_{n-q}$ tq $F = \bigcap_{i=1}^{n-q} \ker(\varphi_i)$

prop (16) : soient A_1, A_2 s.e.v de E alors

(i) $(A_1 + A_2)^\perp = A_1^\perp \cap A_2^\perp$ et $(B_1 + B_2)^\circ = B_1^\circ \cap B_2^\circ$

(ii) $(A_1 \cap A_2)^\perp = A_1^\perp + A_2^\perp$ et $(B_1 \cap B_2)^\circ = B_1^\circ + B_2^\circ$

III. Espaces euclidiens et calcul différentiel

ici, E est un ev euclidien de dim n, on note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire sur E.

prop (17) : l'application : $E \xrightarrow{j} E^*$, $x \longmapsto (y \mapsto \langle x, y\rangle)$ est un isomorphism de E sur E^*

Rq (18) : cet isom est canonique, de plus, on a $j(F^{\perp\langle\rangle}) = F^\perp$ où $F^{\perp\langle\rangle}$ est l'orthogonal de F au sens du prod scal.

application (19) : soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable en $a \in \mathbb{R}^n$ alors $D_a f$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, en particulier, il existe un unique vecteur $\nabla_a f \in \mathbb{R}^n$ tq $Df(a) = \langle \nabla_a f, v\rangle$ $\forall v \in \mathbb{R}^n$. On l'appelle gradient de f en a.

A p12

Lemme (20) : Soient $a, b_1 \dots b_n$ des formes liné sur E ev de dim n. On suppose que $b_1 \dots b_n$ sont liné indep et que $\bigcap_{i=1}^{n} \ker(b_i) \subset \ker(a)$. Alors a est combinaison linéaire des b_i

p 103

Thm (multiplicateurs de Lagrange) (21) : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $g_1 \dots g_n$ des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, tq $(d_x g_i)_{i=1}^{n}$ forme une famille libre de $(\mathbb{R}^n)^*$ $\forall x \in U$. Alors on note $\Pi = \bigcap_{i=1}^{n} \ker(g_i)$ qui est une sous variété de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors si f admet un extremum local en $m \in U \cap \Pi$, il existe $c_1 \dots c_k$ tq $D_m f = c_1 D_m g_1 + \dots + D_m g_k$.

application (22) : soit u un endomorphisme symétrique de E euclidien $(E = \mathbb{R}^n)$ alors E possède une base de vecteurs propres orthogonaux deux à deux.

p 104

IV. Application transposée

Def (23) : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. $\forall f \in F^*$, on a : $f \circ u \in E^*$.

on note ${}^t u : F^* \longrightarrow E^*$, $f \longmapsto f \circ u$ (application transposée)

GRI p 232

Rq ㉔ : $\forall x \in E$, $\forall \varphi \in F^*$, on a $\langle \varphi, u(x) \rangle$
$= \langle {}^t u(\varphi), x \rangle$

G p 130

prop ㉕ : si E et F sont de dimension finie, on note $\mathcal{B}$ base de E, $\mathcal{B}'$ base de F, on a :
$[{}^t u]_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{B}'^*} = {}^t[u]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ donc $rg({}^t u) = rg(u)$

coro ㉖ : en identifiant E et F à leurs biduaux, on a : " ${}^t({}^t u) = u$ ".

cor ㉗ : soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ base de E ($\mathcal{B}_1^*$ et $\mathcal{B}_2^*$ les bases duales). On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$, alors la matrice de passage de $\mathcal{B}_1^*$ à $\mathcal{B}_2^*$ est ${}^t P^{-1}$.

prop ㉘ ; E, F ev de dim finie.
(i) $Im({}^t u) = (\ker(u))^\perp$
(ii) $\ker({}^t u) = (Im(u))^\perp$
(iii) ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u$

prop ㉙ : si E sev de dim finie alors F sev de E stable par u $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ stable par ${}^t u$.

Rq ㉚ : ce résultat s'avère très utile dans le cadre de la réduction, en effectuant des raisonnements par récurrence.

p 166

app ㉛ : Un endomorphisme f est trigonalisable SSI son pol carac χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

Références :

[G] : Gourdon Algèbre
[GRi] : Grifone (Algèbre linéaire)
[A] : Avez (calcul différentiel)