151 Dimension d'un espace vectoriel (dimension finie). Rang. Exemples et applications

Dans cette leçon, on considère E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie où $\mathbb{K}$ est un corps.

I. Bases en dimension finie.

GRi p 10-11-13 **Def ①**: Une famille de vecteurs $(v_i)_{1\leq i\leq p}$ de E est :

(i) génératrice si $\forall x \in E$, $\exists (\lambda_i)_{1\leq i\leq p} \in \mathbb{K}^p$ tels que
$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$$
(ii) libre si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i = 1 \dots p$.

(iii) une base si elle est à la fois libre et génératrice.

GRi p 10 **Def ②**: On dit qu'un ev E est de dimension finie s'il existe une famille génératrice finie dans E.

Ex ③: • $(e_k)_{k=1\dots n}$ où $e_k = (0, \dots, \underset{k\text{-ème rang}}{1}, 0, \dots 0)$ est une base du $\mathbb{K}$-ev $\mathbb{K}^n$.

p10 • $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie (ie n'est pas de dim finie)

p13 **prop ④**: une famille $(v_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base SSI tout $x \in E$ se décompose de manière unique sur les v_i.

p13 **coro ⑤**: Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E, alors :
$$\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}^n \quad \text{est un isomorphisme}$$
$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \longmapsto (x_1, \dots, x_n) \to \text{composante de } x \text{ ds } (v_i)$$

p15 **Thm ⑥**: (Thm de la base incomplète) : soit $E \neq 0$ un ev de dimension finie et G une famille génératrice, et $L \subset G$ une famille libre. Alors il existe $\mathcal{B}$ une base de E tq : $L \subset \mathcal{B} \subset G$.

p17 **Def-Thm ⑦**: Dans un ev de dimension finie, toutes les bases ont le même nombre d'éléments, c'est ce qu'on appelle la dimension de E.

lemme ⑧: si E est un ev engendré par n-éléments, toute famille contenant plus de n-éléments est liée.

p18 **coro ⑨**: Les familles de moins de n-éléments ne peuvent être généré

application ⑩: soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

II. Sous-espace vectoriel

prop ⑪: si F est un sev de E, alors F est un ev de dimension finie, et de plus $\dim_{\mathbb{K}}(F) \leq \dim_{\mathbb{K}}(E)$, et $E = F$ SSI $\dim_{\mathbb{K}}(F) = \dim_{\mathbb{K}}(E)$ GRi p19

Def ⑫: soit $E_1, \dots, E_p$ des sev de E, on dit qu'ils sont en somme directe si tout vecteur de $E = E_1 + \dots + E_p$ admet une unique décomposition $x_1 + \dots + x_p$ où $x_i \in E_i$. GRi p25

Thm ⑬: $E_1, \dots, E_p$ sont en somme directe SSI $\forall$ bases $\mathcal{B}_1 \dots \mathcal{B}_p$ de $E_1 \dots E_p$, $\{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p\}$ est une base de E.

coro ⑭: • $\dim(E_1 \oplus \dots \oplus E_p) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p)$ GRi p27

• $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p \iff \begin{cases} E = E_1 + \dots + E_p \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dots + \dim(E_p) \end{cases}$

Def ⑮: si E_1 et E_2 sont des sev de E, ils sont supplémentaires si $E = E_1 \oplus E_2 \iff \begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ \dim(E) = \dim(E_1) + \dim(E_2) \end{cases}$ GRi p22-23

prop ⑯ (Formule de Grassman) : $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$

prop ⑰: si E_1 sev de E, $\exists E_2$ sev de E supplémentaire de E_1 GRi p22, p31

Ex ⑱: $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

III. Rang d'une application linéaire

On considère ici E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie

Def ⑲: soit $f : E \to F$ une application linéaire. On note $f(E) = \mathrm{Im}(f)$ qui est un sev de F, et on appelle rang de f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ (on note $\mathrm{rg}(f)$) GRi p59

GRi p 62

Thm (20) : (Thm du rang) : soit $f : E \to F$ une a.l, alors
$\dim(E) = rg(f) + \dim(\ker(f))$

Ex d'application (21) : Soit E un ev euclidien et $u \in O(E)$. Soit $r = rg(u - id_E)$, alors u s'écrit comme produit de exactement r réflexions, ce nombre étant minimal. De plus, $SO(E)$ est engendré par les renversements si $\dim(E) = 3$,

FGN

coro (22) : si $\dim(F) = \dim(E)$ et $f : E \to F$ a.l, alors f est bijective SSI f est injective SSI f surjective

BG GRi p 63

Ex (23) :
- en dimension infinie : $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto P'$ est surjective non injective
- soit $a_0 \dots a_n \in \mathbb{K}$ des éléments distincs, alors si $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme P de degré $\leq n$ tel que $P(a_i) = x_i \ \forall i = 0, \dots, n$. (si $x_i = g(a_i)$ où g est une fonction continue sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors P est le polynôme interpollateur de Lagrange deg)

IV. Rang d'une matrice

ici $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $n, m \in \mathbb{N}^*$

NH2G2 p 7

Def (24) : soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ($n, p \in \mathbb{N}^*$) la dimension de l'ev engendré par ses colonnes dans $\mathbb{K}^m$

prop (25) : si $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $Q \in GL_p(\mathbb{K})$, alors $rg(PAQ^{-1}) = rg(A)$.

NH2G2 p 230

Def (26) : on appelle matrice de dilatation une matrice de la forme
$$D_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \alpha & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$
une matrice de transvection est une matrice de la forme
$$T_{ij}(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & & \beta \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad i \neq j$$
une matrice de permutation :
$$P_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 \\ & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad i < j$$

NH2G2 p 230

Rq (27) : On a les correspondances suivantes :

opération	$D_i(\alpha) A$	$T_{ij}(\beta) A$	$P_{ij} A$
résultat	$L_i \leftarrow \alpha L_i$	$L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$	$L_i \leftrightarrow L_j$

appli (28) : $GL_n(\mathbb{K})$ est engendré par les matrices de transvections et de dilatations.

NH2G2 p 4

Thm (29) : soit A une matrice de rang r, alors elle est équivalente à $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (ie $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$, $Q \in GL_p(\mathbb{K})$ tq $A = P J_r Q^{-1}$)

coro (30) : deux matrices sont équivalentes SSI elles ont même rang.

mineur : GRi p 127

V. Espace vectoriels normés

On considère ici un $\mathbb{K}$-ev normé $(E, \|.\|)$ de dimension finie avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

COU p 47

Def (31) : Deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur E sont dites équivalentes si $\exists a > 0, b > 0, \forall x \in E$:
$$a\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\|x\|_1$$

p 50

Thm (32) : toutes les normes sont équivalentes sur E ev de dimension finie.

Coro (33) : (i) Toute a.l entre e.v.n de dimension finie est continue.

(ii) Tout evn de dimension finie est complet.
(iii) Les partie compactes d'un evn de dimension finie sont les fermés bornés

Thm 34 : soit E un $\mathbb{R}$-evn. Alors E est de dimension finie SSI $\overline{B}(0,1)$ est compact.

Références:

[H2G2] : Caldero (Nouvelle histoire ...) (IV)
[GRi] : Grifone (Algèbre linéaire) (I, II, III) 70%
[GOU] : Gourdon (Analyse) (V)