144 — Racines d'un polynôme. Fonction symétriques élémentaires. Exemples et applications

$\mathbb{K}$ désigne un corps, E $\mathbb{K}$-ev de dim fini. On suppose connu les résultats d'extensions de corps.

I. Définitions et première propriétés.

[G] p59

Def ①: Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. $\forall F = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$ on note $\tilde{F} : A \to A$, $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ou seulement $x \mapsto F(x)$

si $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ extension de $\mathbb{K}$, on dit que $a \in \mathbb{L}$ est une racine de F si $F(a) = 0$.

prop ②: soit $a \in \mathbb{K}$, et $F \in \mathbb{K}[X]$. a est une racine de F SSI $(X-a) \mid F$.

Def ③: soit $a \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. a est racine d'ordre k de F si $(X-a)^k \mid F$ et $(X-a)^{k+1} \nmid F$

prop ④: si $F \in \mathbb{K}[X]$, est de degré $n \geq 1$, alors F a au plus n racines (comptée avec multiplicité).
En particulier, si $F(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{K}$ et que $\mathbb{K}$ est infini, alors $F = 0$.

C-Ex ⑤: ce résultat est faux dans un anneau quelconque : $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et $F = 4X$ a 3 racines.
- si $\mathbb{K}$ est fini, $\mathbb{K} = \{a_1 \dots a_n\}$. $F(X) = (X-a_1)\dots(X-a_n)$ vérifie $F(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{K}$ mais $F \neq 0$.

Def ⑥: $F \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ si on peut écrire $F = \lambda (X-a_1)^{k_1} \dots (X-a_r)^{k_r}$ $\lambda \in \mathbb{K}$, $a_i \in \mathbb{K}$, $k_i \in \mathbb{N}^*$ $\forall i$

Thm ⑦: si $\mathbb{K}$ est de caractéristique 0, et si $F \in \mathbb{K}[X]$, $F \neq 0$, alors a est racine d'ordre k de F SSI $\forall i \leq k-1$ $F^{(i)}(a) = 0$ et $F^{(k)}(a) \neq 0$

C-Ex ⑧: ceci est faux en caractéristique non nulle : $P = X^3$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$.

Rq ⑨: en caractéristique quelconque, $F \neq 0$, si $a \in \mathbb{K}$, alors a est racine simple de F SSI $F(a) = 0$ et $F'(a) \neq 0$

II. Localisation et comportement des racines.

p96

prop ⑩: Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $\deg(P) \geq 2$, les racines de P' appartiennent à l'enveloppe convexe des racines de P

app ⑪: si $P \in \mathbb{R}[X]$ a toutes ses racines réelles alors les racines de P' sont réelles. Plus précisément, si $P = \beta (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_p)^{\alpha_p}$, il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$ $i \in \{1 \dots p-1\}$.
de plus, $\forall i$ tq $\alpha_i \geq 2$, a_i est racine de P' de multiplicité $\alpha_i - 1$, ceci nous donne $p - 1 + \sum_{i=1}^{p} (\alpha_i - 1)$ racines de P' au total, soit $\deg(P) - 1 = \deg(P')$.

p65

prop ⑫: soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ irréductible, alors P n'a que des racines simples dans $\mathbb{C}$

app ⑬: soit $P \in \mathbb{Q}[X]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ racine d'ordre $\mu > \frac{d^\circ(P)}{2}$ alors $\lambda \in \mathbb{Q}$.

[B] p 104

Thm ⑭: Soient $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ et x_0 racine simple de P_0, alors $\exists$ $\varphi : U \to V$ $\mathcal{C}^\infty$ avec $P_0 \in U$, $x_0 \in V$ telle que $\forall P \in U$, $\forall x \in V$, $x = \varphi(P) \iff P(x) = 0$.

application ⑮: L'ensemble $\mathcal{Y}$ des polynômes scindés à n-racines simple de $\mathbb{R}_n[X]$ est un ouvert de $\mathbb{R}_n[X]$

III. Applications à la réduction des endomorphismes

[G] p172

Def 16 : • Soit $P = a_0 + \dots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$, $\forall f \in \mathcal{L}(E)$ on note $P(f) = a_0 id_E + \dots + a_p f^p$.

• le polynôme caracté de f est $\chi_f = \det(X Id - f)$

• le polynôme minimal de f est l'unique générateur de l'idéal $I = \{P \in K[X],\ P(f) = 0\}$ noté μ_f.

p126 p122 p123 p124

prop 17 : λ valeur propre de f $\iff$ λ racine de μ_f
$\iff$ λ racine de χ_f

prop 18 : • f est diagonalisable SSI μ_f est scindé à racines simples

• f est trigonalisable SSI χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

prop 19 : si $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$. f diagonalisable $\iff$ $X^q - X$ annule f

ZAVIDOVI ROUVIÈRE

application en topologie 20 : Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $GL_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

IV Extension de corps

p62

prop 21 : soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(P) \geq 1$, $\mathbb{K}[X]/(P)$ est un corps SSI P est irréductible.

cor 22 : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, Il existe une extension $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ telle que P admette une racine x dans $\mathbb{L}$

cor 23 : soit $F \in \mathbb{K}[X]$, $\deg(F) \geq 1$, il existe une extension $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ tq F soit scindé sur $\mathbb{L}$. Une telle extension est appelée corps de décomposition de F.

Def 24 : Un corps $\mathbb{K}$ est algébriquement clos si tout polynôme de degré ≥ 1 de $\mathbb{K}[X]$ a au moins une racine.

Ex 25 : • $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

• un corps fini n'est pas algébriquement clos.

[FG] p93

Def-prop 26 : on note μ la fonction de Möbius. Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, on pose $g : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \sum_{d|n} f(d)$, alors $\forall n \geq 1$

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

DVP [FG] p190

Thm 27 : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note $A(n,q)$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{F}_q[X]$ irréductibles, unitaires de degré n et $I(n,q) = |A(n,q)|$. Alors $I(n,q) \geq 1$ et $I(n,q) \underset{+\infty}{\sim} \frac{q^n}{n}$

V. Polynômes symétriques.

[G] p78

Def 28 : • $P \in A[X_1 \dots X_n]$ est dit symétrique si $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ $P(X_{\sigma(1)} \dots X_{\sigma(n)}) = P(X_1 \dots X_n)$

• les polynômes symétriques élémentaires sont les pol de $A[X_1 \dots X_n]$: $\sigma_k(X_1 \dots X_n) = \sum_{\substack{I \subset \{1 \dots n\} \\ |I| = k}} \prod_{i \in I} X_i$ $k = 1 \dots n$.

$\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sigma_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$

Thm 29 : Soit $P = a_0 + \dots + X^n$ scindé sur un corps $\mathbb{K}$. $P = (X - x_1) \dots (X - x_n)$ alors $\forall\, 0 \leq p \leq n-1$ $a_p = (-1)^{n-p} \sigma_{n-p}(x_1, \dots x_n)$

Thm 30 : soit A un anneau commutatif unitaire et $P \in A[X_1 \dots X_n]$ un polynôme symétrique dans $A[X_1 \dots X_n]$. Il existe une unique pol $\Phi \in A[X_1 \dots X_n]$ tq $P = \Phi(\sigma_1 \dots \sigma_n)$

FGN 1 p 198 DVP FGN 2 p192

app (31) : Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$ dont les racines complexes sont de module ≤ 1. On suppose que $P(0) \neq 0$. Les racines de P sont alors des racines de l'unité.

app (32) : Il n'y a à isomorphisme près qu'un nombre fini de groupes de cardinal fini donné dans $GL_n(\mathbb{Z})$.

VI. Polynômes cyclotomiques

Def (33) : on note μ_n^* l'ensemble des racines primitives n-ème de l'unité de $\mathbb{C}$. On appelle n-ème pol cyclo le polynôme $\Phi_n(X) = \prod_{\xi \in \mu_n^*} (X - \xi) \in \mathbb{C}[X]$

prop (34) : $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

DVP Thm (35) : Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}[X]$ (et sur $\mathbb{Z}[X]$)

cor (36) : le polynôme minimal de $\xi \in \mu_n^*$ est Φ_n.

Références :

[B] : BECK (Objectif agreg) [14 et 15]

[FG] : Francinou Gianella (Exo pour agreg) [26 27]

[FGNk] : Oraux X-ENS 1 et 2 [31 32]

[G] : Gourdon (Algèbre)