107 Représentation et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Ex et appli

Dans cette leçon, G désigne un groupe fini de cardinal g, V un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie n.

I. Généralités SER p15 – 20

A. Définitions et exemples

Def 1 : • Une représentation linéaire de G sur V est un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$. On notera souvent $\rho(s) =: \rho_s$ si $s \in G$.

• le degré de ρ est $n = \dim(V)$

Ex 2 : • On appelle représentation unité la représentation
$$\rho : \begin{array}{l} G \to \mathbb{C}^* \\ s \mapsto 1 \end{array}$$
qui est de degré 1.

• On appelle représentation constante de degré n la représentation
$$\rho : \begin{array}{l} G \to GL(V) \\ s \mapsto id_V \end{array}$$

Def 3 : Soient ρ et ρ' deux représentations linéaires de G : $\rho : G \to GL(V)$ et $\rho' : G \to GL(V')$. On dit que ces représentations sont isomorphes (ou semblables) s'il existe un isomorphisme $u : V \to V'$ tel que $\forall s \in G$ $u \circ \rho(s) = \rho'(s) \circ u$.

Ex 4 : • soit V un ev de dimension $g = |G|$, ayant une base $(e_t)_{t\in G}$. Alors
$$\rho : \begin{array}{l} G \to GL(V) \\ s \mapsto (e_t \mapsto e_{st}) \end{array}$$
est une représentation appelée représentation régulière de G notée τ.

• Inversement, soit ρ' une représentation de G sur $GL(W)$ telle que : $\exists w \in W$ vérifiant $(\rho_s(w))_{s\in G}$ est une base de W. Alors ρ' est isomorphe à la représentation régulière τ (par l'isomorphisme $u : \begin{array}{l} V \to W \\ e_s \mapsto \rho_s(w) \end{array}$)

• Supposons que G opère sur X un ensemble fini :
$$\cdot : \begin{array}{l} G \times X \to X \\ (g,s) \mapsto g\cdot s \end{array}$$
notons V un ev de base $(e_x)_{x\in X}$ alors $\rho : \begin{array}{l} G \to GL(V) \\ s \mapsto (e_x \mapsto e_{s\cdot x}) \end{array}$ est une représentation de G (dite : de permutat°)

B. Sous-représentations

Def 5 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation et soit W un sev de V stable par ρ (ie stable par tous les ρ_s où $s \in G$) alors $\forall s \in G$, $\rho_{s|W} \in GL(W)$, on définit donc une sous-représentation
$$\rho_{|W} : \begin{array}{l} G \to GL(W) \\ s \mapsto \rho_{s|W} \end{array}.$$

Ex 6 : soit $\tau : G \to GL(V)$ la représentation régulière de G. Notons $W = \mathrm{vect}\left(x = \sum_{s\in G} e_s\right)$. Alors $\rho_s(x) = x$ $\forall s \in G$ donc $\tau_{|W}$ est une sous-représentation de τ, isomorphe à la représentation unité.

Def 7 : soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G. Si $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ où V_i stable par ρ, alors on dit que ρ est la somme directe des $\rho_i = \rho_{|V_i}$, on note $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$.
si alors B_i est une base de V_i et $B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$, on a $\forall s \in G$
$$[\rho_s]_B = \begin{pmatrix} [\rho_{1s}]_{B_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & [\rho_{rs}]_{B_r} \end{pmatrix}.$$

Thm 8 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G sur V et soit W un sev de V stable par ρ. Alors il existe $W°$ un supplémentaire de W, stable par ρ.

C. Représentations irréductibles.

Def 9 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation, on dit qu'elle est irréductible (ou simple) si V n'est pas réduit à 0 et si les seuls sev stables par ρ sont $\{0\}$ et V.

Rq 10 : toute représentation de degré 1 est irréductible.

Thm 11 : Toute représentation est somme directe de représentat° irréductibles : $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$

Rq 12 : Une telle décomposition n'est en général pas unique comme le montre l'exemple de la représentation constante de degn

II. Caractère d'une représentation SER p23-33

A. Définition

Def 13 : Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G sur V. son caractère est $\chi : G \to \mathbb{C}$
$s \mapsto tr(\rho_s)$

prop 14 : Soit χ le caractère d'une représentation ρ de deg n :
(i) $\chi(1) = n$ (ii) $\chi(s^{-1}) = \overline{\chi(s)}$ (iii) $\chi(tst^{-1}) = \chi(s)\ \forall s,t \in G$ $\Leftrightarrow \chi$ est central.
(iv) si $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} \rho_i$ et χ_i le caractère de ρ_i, alors $\chi = \sum_{i=1}^{r} \chi_i$

Ex 15 : si G opère sur X fini et V $\mathbb{C}$-ev de dimensi $|X|$, avec $(e_x)_{x\in X}$ base de V et ρ la représentation de permutation associée à X. alors $\forall s \in G$ $\chi(s) = |\{x \in X, s.x = x\}|$.

B. Lemme de Schur et premières applications

prop 16 : (Lemme de Schur) Soient $\rho^1 : G \to GL(V_1)$ et $\rho^2 : G \to GL(V_2)$ deux représentations irréductibles de G, et soit $f \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ telle que $\rho_s^2 \circ f = f \circ \rho_s^1$ $\forall s \in G$. Alors :
(i) si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, on a $f = 0$
(ii) si $V_1 = V_2$, $\rho^1 = \rho^2$ alors f est une homothétie.

coro 17 : avec les même notations, supposons que l'on ait $h \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ et posons $h^0 = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} (\rho_t^2)^{-1} h\, \rho_t^1$ alors :
(i) si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, on a $h^0 = 0$
(ii) si $V_1 \underset{= V}{=} V_2$ et $\rho^1 \underset{= \rho}{=} \rho^2$, h^0 est une homothétie de rapport $\frac{1}{n} tr(h)$

Def 18 : soient φ et ψ deux fonctions sur G, à valeur dans $\mathbb{C}$ on pose $\langle \varphi, \psi \rangle = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \varphi(t^{-1})\psi(t)$
$= \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \varphi(t)\psi(t^{-1})$

Thm 19 : soient $\rho_i : G \to GL(V_i)$ des représentations irréductibles ($i \in \{1,2\}$) B_i une base de V_i. $\forall t \in G$, on écrit $[\rho_t^1]_{B_1} = (r_{i_1 j_1}(t))_{i_1, j_1 \leq n_1}$ et $[\rho_t^2]_{B_2} = (u_{i_2 j_2}(t))_{i_2, j_2 \leq n_2}$ alors :
(i) si ρ_1 et ρ_2 ne sont pas isomorphes, alors $\forall i_1, j_1 \in [\![1, n_1]\!]$ et $\forall i_2 j_2 \in [\![1, n_2]\!]$: $\langle u_{i_2 j_2}, r_{i_1 j_1} \rangle = 0$
(ii) si $\begin{cases} V_1 = V_2 = V \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho \end{cases}$ alors $\langle u_{i_2 j_2}, r_{i_1 j_1} \rangle = \frac{1}{n}\delta_{i_2 i_1}\delta_{j_2 j_1}$

C. Orthogonalité des caractères

Def 20 : On définit un produit scalaire sur $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ par :
$$(\varphi | \psi) = \frac{1}{g}\sum_{t\in G} \varphi(t)\overline{\psi(t)} \quad (\text{où } g = |G|)$$
Remarquons que si χ_2 est un caractère, $(\chi_1 | \chi_2) = \langle \chi_1 | \chi_2 \rangle$.

Thm 21 : Soient $\rho_i : G \to GL(V_i)$ des représentations irréductibles ($i \in \{1,2\}$) de caractère χ_i alors :
(i) si ρ^1 et ρ^2 ne sont pas isomorphes, alors $(\chi_1, \chi_2) = 0$
(ii) si $\begin{cases} V_1 = V_2 = V \\ \rho_1 = \rho_2 = \rho \end{cases}$ alors $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ et $(\chi, \chi) = 1$.

Les caractères irréductibles forment un système orthogonal, il y a donc au plus $k = \dim(\mathcal{F}(G, \mathbb{C}))$ représentations irréductibles à isomorphisme près.

Thm 22 : soient $\rho_i : G \to GL(V_i)$ les représentations irréductibles de G sur V ($i \in [\![1, r]\!]$) telle que χ_i soit le caractère de ρ_i.
Soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de G, alors on a :
$\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} m_i \rho_i$ où $m_i \rho_i = \underbrace{\rho_i \oplus \dots \oplus \rho_i}_{m_i\text{-termes}}$. Alors :
$\forall i \in [\![1, r]\!]$, $m_i = (\chi, \chi_i)$ (donc m_i ne dépend pas de la décomposition choisie de ρ.

Coro 23 : deux représentations de même caractère sont isomorphes.

coro 24 : si $\rho : G \to GL(V)$ représentation de caractère χ alors $(\chi, \chi) = \sum_{i=1}^{r} m_i^2$ où l'on a écrit $\rho = \bigoplus_{i=1}^{r} m_i \rho_i$.

En particulier, $(\chi, \chi) \in \mathbb{N}$ et ρ irréductible $\Leftrightarrow (\chi,\chi) = 1$.

D. Nombre de représentations irréductibles

prop 25 : soit $\tau : G \to GL(V)$ la représentation régulière de G, on note r_G son caractère. On a :
(i) $r_G(1) = g$ et $r_G(s) = 0$ si $s \neq 1$.
(ii) si $\rho_1 \dots \rho_k$ sont les représentations irréductibles (à isom près) de G et $\chi_1 \dots \chi_k$ leur caractère, et soit $\tau = \bigoplus_{i=1}^{k} m_i \rho^i$ la décomposition de τ alors :
$m_i = \deg(\rho^i) =: n_i$
(iii) on a $\sum_{i=1}^{k} n_i^2 = g$ et $\sum_{i=1}^{k} n_i \chi_i(s) = 0 \quad \forall s \in G \neq 1$.

Thm 26 : Notons H l'ensemble des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ qui sont centrales. Alors les caractères irréductibles de G forment une base de H (orthonormée).
En particulier le nombre de représentations irréductibles de G (à isomorphisme près) vaut le ~~nombre~~ le cardinal de classes de conjugaison de G.

application 27 : soit $s \in G$ et $c(s)$ le cardinal de la classe de conjugaison des
(i) $\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i(s)}\, \chi_i(s) = \frac{g}{c(s)}$ où $\chi_1 \dots \chi_k$ sont les caractères irréductibles de G
(ii) si $t \notin \mathrm{conj}(s)$, on a : $\sum_{i=1}^{k} \overline{\chi_i(s)}\, \chi_i(t) = 0$.

III. Tables de caractères

A. Cas particuliers

Thm 28 : G abélien $\Leftrightarrow$ toute représentation irréductible est de degré 1.

coro 29 : si A est un sous-groupe commutatif de G, $|A| = a$ alors une représentation irréductible de G est de degré $\leq \frac{g}{a}$.

prop 30 : soit $N \triangleleft G$ et $\bar\rho : G/N \to GL(V)$ une représentation irréductible alors $\rho : G \to GL(V)$, $s \mapsto \bar\rho(\bar s)$ est une représentation irréductible de G

(PEY) p23 (SER p37)

prop 31 : soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation et H un sous-groupe de G tel que $\rho_{|H} : H \to GL(V)$ est irréductible, alors ρ est irréductible.

prop 32 : si $\rho : G \to GL(V)$ est irréductible de caractère χ et $\varepsilon : G \to \mathbb{C}^*$ un morphisme de groupes, alors $\varepsilon\rho : G \to GL(V)$, $s \mapsto \varepsilon(s)\rho_s$ est irréductible de caractère $\varepsilon\chi : s \mapsto \varepsilon(s)\chi(s)$.

B. Tables de caractères

Def 33 : si $C_1 \dots C_r$ sont les classes de conjugaison de G et $\chi_1 \dots \chi_r$ les caractères irréductibles de G, la table de caractère de G est le tableau $r \times r$ qui donne les valeurs $(\chi_i(C_j))_{\substack{i=1..r \\ j=1..r}}$ (Annexe ①)

Ex 34 : • Le groupe cyclique d'ordre n : $C_n = \langle r \rangle$ où $r^n = 1$ (Annexe ②)
• Table de S_3 : les classe de conjugaisons sont $T = \{\text{transpositions}\}$ $C = \{3\text{-cycles}\}$ et $\{1\}$. (Annexe ③)
• Table de A_4 (Annexe ⑤)

C. Tables et simplicité

prop 35 : soit $\rho : G \to GL(V)$ une représentation de caractère χ, soit $s \in G$ d'ordre k alors :
(i) $\rho(s)$ est diagonalisable (ii) χ est somme de $d = \dim(V)$ racines k-ième de l'unité.
(iii) $|\chi(s)| \leq d$
(iv) $K_\chi := \{x \in G,\ \chi(x) = \chi(1)\}$ est un sous-groupe distingué de G

Thm 36 : soient $\rho^1 \dots \rho^r$ les représentations irréductibles de G de caractères $\chi_1 \dots \chi_r$. Les sous-groupes distingués de G sont les $\bigcap_{i \in I} K_{\chi_i}$ où $I \subset [\![1, r]\!]$

Coro 37 : G est simple $\Leftrightarrow \forall i \neq 1, \forall g \in G, \chi_i(g) \neq \chi_i(1)$

ITAL p45-47

PEY p23

Annexe :

①:

	$\{1\}=C_1$	C_2		C_r
$\chi_1=1$	1	1	- - -	1
χ_2	$\deg(\chi_2)$	$\chi_2(C_2)$	- - -	$\chi_2(C_r)$
⋮	⋮	⋮		⋮
χ_r	$\deg(\chi_r)$	$\chi_r(C_2)$	- - -	$\chi_r(C_r)$

Table de caractère générale

②:

	$\{1\}$	$\{r\}$		$\{r^k\}$		$\{r^{n-1}\}$
χ_0	1	1	- - -	1	- - -	1
χ_1	1	ζ_1		ζ_1^k		ζ_1^{n-1}
⋮						⋮
χ_{n-1}	1	ζ_1^{n-1}	- - -	$\zeta_1^{k(n-1)}$	- - -	$\zeta_1^{(n-1)^2}$

$\zeta_1 = e^{\frac{2i\pi}{n}}$

Table de C_n

③

	$\{id\}$	T	C
$\chi_1\equiv 1$	1	1	1
$\chi_2=\varepsilon$	1	-1	1
χ_3	2	0	-1

Table de $\mathfrak{S}_3$

④

	$\{id\}$	$H\setminus\{id\}$	tH	t^2H
$\chi_1=1$	1	1	1	1
χ_2	1	1	j	j^2
χ_3	1	1	j^2	j
χ_4	3	-1	0	0

$H=\{$double transpositions$\}$

Table de A_4

Références:

J-P SERRE (représentations linéaires des groupes finis) [SER] (95%)

M.P. MALLIAVIN (les groupes finis et leurs représentations complexes) [MAL] (pour les tables III.B)

G. PEYRÉ (Algèbre discrète de la transformée de Fourier) [PEY] (pour III.C)