Ref : Candelpergher

DVT

Fonction génératrice et moment

Énoncé : Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors X est d'espérance finie si et seulement si sa fonction génératrice G_X est dérivable à gauche au point 1, et dans ce cas on a $\mathbb{E}[X] = G_X'(1)$.

Dém · Supposons que $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) < +\infty$. Pour $x \in [-1,1[$, on a

$$\frac{G_X(x) - G_X(1)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)\,\frac{x^n - 1}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\mathbb{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right)$ est normalement convergente sur $[-1,1]$ car

$\left| \mathbb{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right| \leq n\,\mathbb{P}(X=n)$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) < +\infty$ par hypothèse.

Donc on peut intervertir limite et intégrale :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{G_X(x) - G_X(1)}{x-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to 1^-} \left(\mathbb{P}(X=n) \sum_{k=0}^{n-1} x^k \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,\mathbb{P}(X=n) = \mathbb{E}[X].$$

· Réciproquement, supposons que G_X est dérivable à gauche en 1. G_X est continue sur $[0,1]$, dérivable sur $[0,1[$. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x \in]0,1[$, il existe $s_x \in]x,1[$ tel que $\frac{G_X(x) - G_X(1)}{x-1} = G_X'(s_x)$.

Comme la fonction $s \mapsto G_X'(s) = \sum_{n\geq 1} n\,\mathbb{P}(X=n)\, s^{n-1}$ est croissante, le fait que $\frac{G_X(x) - G_X(1)}{x-1} \xrightarrow[x\to 1^-]{} G_X'(1)$ montre que la limite de G_X' en 1, qui

existe dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, est finie, disons $S < +\infty$. Par croissance, on a $G_X'(x) \leq S$ pour $x \in [0,1[$. Par positivité des coefficients, pour tout x et $N \in \mathbb{N}^*$,

$\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbb{P}(X=n)\, x^{n-1} \leq S$. On passe à la limite pour $x \to 1^-$:

$\sum_{n=1}^{N} n\,\mathbb{P}(X=n) \leq S$. Vrai pour tout N.

Donc $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n\,\mathbb{P}(X=n)}_{\geq 0} < +\infty$ et la 1ère partie montre que $G_X'(1) = \mathbb{E}[X]$. ∎

$p-1+2p(p-1)$

$p-1+2p^2-2p$

$-p-1+2p^2$

Application : On effectue des jeux de pile ou face successifs indépendants, avec probabilité $p \in]0,1[$ de faire face, $1-p$ de faire pile. On s'arrête lorsque l'on obtient deux faces consécutifs. En moyenne, il faut $\dfrac{1+p}{p^2}$ répétitions.

Dém : 0 : pile
1 : succès

La suite des résultats est une suite de 0 et de 1 qui se termine par deux 1 consécutifs. Soit X la longueur de cette suite.

L'événement $(X=n)$ où $n \geq 4$ correspond aux suites

$$(0,\dots,0,1,1) \quad \text{et} \quad (1,0,\dots,0,1,1)$$

d'où la relation de récurrence

$$\mathbb{P}(X=n) = (1-p)\,\mathbb{P}(X=n-1) + p(1-p)\,\mathbb{P}(X=n-2)$$

et $X=2$: $(1,1)$ donc $\mathbb{P}(X=2)=p^2$

$X=3$: $(0,1,1)$ donc $\mathbb{P}(X=3) = p^2(1-p)$.

Mais alors $G_X(z) = \displaystyle\sum_{n\geq 2}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)z^n = p^2z^2 + (1-p)p^2z^3 + \sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(X=n+2)z^{n+2}$

et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \mathbb{P}(X=n+2)z^{n+2} = (1-p)\sum_{n\geq 2}\mathbb{P}(X=n+1)z^{n+2} + p(1-p)\sum_{n\geq 2}\mathbb{P}(X=n)z^{n+2}$

$$= (1-p)z\left(G_X(z) - p^2z^2\right) + p(1-p)z^2G_X(z).$$

Donc $G_X(z)\left[1-(1-p)z-p(1-p)z^2\right] = p^2z^2$

soit $G_X(z) = \dfrac{p^2z^2}{1-(1-p)z-p(1-p)z^2}$.

Notons que $G_X(1) = 1 = \displaystyle\sum_{n\geq 1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)$ donc $X < +\infty$ presque sûrement.

De plus, G_X est dérivable en $z=1$, et $G_X'(1) = \dfrac{2p^2\cdot p^2 - p^2\cdot(2p^2-p-1)}{p^4}$

$= \dfrac{p+1}{p^2}$. Donc $\mathbb{E}[X] = G_X'(1) = \dfrac{p+1}{p^2}$. $\blacksquare$

Par exemple : avec $p=\dfrac{1}{10}$, il faut en moyenne 10 répétitions pour avoir un succès, et 110 répétitions pour en avoir deux consécutifs.