Réf : Candelpergher

DVT

Limite en loi de variables gaussiennes

Énoncé : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de loi $\mathcal{N}(a_n, b_n)$ où $b_n \geq 0$. On suppose que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X. Alors X obéit à une loi normale ou à un dirac.

D/ On a $\varphi_{X_n}(t) = e^{ia_n t} e^{-\frac{1}{2}t^2 b_n^2}$.

* Supposons que la suite (b_n) n'est pas bornée. Alors il existe une sous suite (b_{n_k}) telle que $b_{n_k}^2 \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$. Nous avons donc $\varphi_{X_{n_k}}(t) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ pour $t\neq 0$. Or, puisque $X_n \xrightarrow{loi} X$, nous savons que (φ_{X_n}) converge simplement vers φ_X sur $\mathbb{R}$. Nous devrions donc avoir $\varphi_X(t) = 0$ pour $t \neq 0$. Or, $\varphi_X(0) = 1$. Cela contredit le fait que φ_X est continue.

* Ainsi (b_n) est bornée. Considérons $b, c \in \mathbb{R}_+$ deux valeurs d'adhérence de (b_n), et (b_{i_k}), (b_{j_k}) des suites extraites telles que $b_{i_k} \to b$, $b_{j_k} \to c$.

Comme $|\varphi_{X_n}(t)| = e^{-\frac{1}{2}t^2 b_n^2}$, nous en déduisons que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$|\varphi_X(t)| = \lim_{k\to+\infty} |\varphi_{X_{i_k}}(t)| = e^{-\frac{1}{2}t^2 b^2} = \lim_{k\to+\infty} |\varphi_{X_{j_k}}(t)| = e^{-\frac{1}{2}t^2 c^2}.$$

Donc $b = c$. Comme (b_n) est bornée avec une seule valeur d'adhérence, nous en déduisons que (b_n) converge vers un réel $b \in \mathbb{R}_+$.

* Ainsi, $e^{ia_n t} = \varphi_{X_n}(t) e^{\frac{1}{2}t^2 b_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi_X(t) e^{\frac{1}{2}t^2 b^2}$. Les fonctions $\varphi_n(t) = e^{ia_n t}$ sont les fonctions caractéristiques des lois δ_{a_n}. Elles convergent simplement vers la fonction $t \mapsto \varphi_X(t) e^{\frac{1}{2}t^2 b^2}$ qui est continue en 0 donc par le théorème de Lévy, la suite (δ_{a_n}) converge en loi. La suite des fonctions de répartitions F_{δ_n} converge donc vers une fct° de répartition F en tout point de continuité de F. Or, F_{δ_n} ne prend que les valeurs 0 ou 1, donc F aussi. Comme F est croissante, F n'a qu'un seul point de discontinuité $a \in \mathbb{R}$. Donc $\delta_{a_n} \xrightarrow{loi} \delta_a$.

* Soit $\varepsilon > 0$ et h une fonction continue bornée telle que $h \equiv 1$ sur $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $h \equiv 0$ sur $\mathbb{R} \setminus]a-2\varepsilon, a+2\varepsilon[$. La convergence en loi de δ_{a_n} vers δ_a implique $\lim\limits_{n \to +\infty} h(a_n) = h(a) = 1$. Donc pour n suffisamment grand,

$h(a_n) > 0$ et donc $a_n \in]a-2\varepsilon, a+2\varepsilon[$. Ainsi, $a_n \longrightarrow a$.

* Finalement, $e^{ia_n t} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \varphi_X(t) e^{\frac{1}{2}t^2 b^2}$ Donc $\varphi_X(t) = e^{iat} e^{-\frac{1}{2}t^2 b^2}$
$\xrightarrow{\hphantom{n \to +\infty}} e^{iat}$

Il s'ensuit que X obéit à une loi $\mathcal{N}(a, b)$ si $b > 0$, δ_a si $b = 0$.