Ref : Rouvière

DVT

Point de Fermat

Énoncé : Soient A, B, C trois points non alignés du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. On suppose que les trois angles du triangle sont $< \frac{2\pi}{3}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $M \mapsto AM + BM + CM$.

Alors f atteint un minimum sur $\mathbb{R}^2$ en un point P intérieur au triangle ABC. Ce minimum est global strict (donc unique). De plus, les angles $\widehat{APB}$, $\widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$ sont égaux à $\frac{2\pi}{3}$.

Lemme : Soit $O \in \mathbb{R}^2$ et $F_0 : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}_+^*$, $M \mapsto OM$. Alors F_0 est de classe C^∞ et convexe (sur tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ convexe). De plus, pour $h \in \mathbb{R}^2$, $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, on a $d^2F_0(M)\cdot(h,h) > 0$ si et seulement si $\vec{OM}$ et h ne sont pas colinéaires.

D/ On a $F_0(M) = \sqrt{\langle \vec{OM}, \vec{OM} \rangle}$. Comme $M \mapsto \langle \vec{OM}, \vec{OM} \rangle$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ (polynomial en les coordonnées de M), F_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ par composition.

Fixons $M \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $h \in \mathbb{R}^2$ petit. $F_0(M+h) - F_0(M) = O(M+h) - OM$
$= \|\vec{OM}+h\| - OM$.

Or $\|\vec{OM}+h\| = \left(OM^2 + \|h\|^2 + 2\vec{OM}\cdot h\right)^{1/2} = OM\left(1 + \frac{\vec{OM}\cdot h}{OM^2} + o(h)\right)$

Donc $F_0(M+h) - F_0(M) = \frac{\vec{OM}\cdot h}{OM} + o(h)$. Cela prouve que $\vec{\nabla}F_0(M) = \frac{\vec{OM}}{OM}$.

On différencie maintenant le gradient. $\vec{\nabla}F_0(M+h) - \vec{\nabla}F_0(M) = \frac{\vec{OM}+h}{\|\vec{OM}+h\|} - \frac{\vec{OM}}{OM}$

$$= \frac{\vec{OM}+h}{OM\left(1 + \frac{\vec{OM}\cdot h}{OM^2} + o(h)\right)} - \frac{\vec{OM}}{OM} = \frac{1}{OM}\left((\vec{OM}+h)\left(1 - \frac{\vec{OM}\cdot h}{OM^2} + o(h)\right) - \vec{OM}\right)$$

$$= \frac{1}{OM}\left(h - \frac{\vec{OM}\cdot h}{OM^2}\vec{OM} + o(h)\right)$$

Cela prouve que $d(\vec{\nabla}F_0)(M)\cdot h = \frac{h}{OM} - \frac{\vec{OM}\cdot h}{OM^3}\vec{OM}$ pour $h \in \mathbb{R}^2$.

Donc $d^2 F_O(M)\cdot(h,h) = \langle d(\vec\nabla F_O)(M)\cdot h, h\rangle = \frac{\|h\|^2}{OM} - \frac{(\vec{OM}\cdot h)^2}{OM^3} \geq \frac{\|h\|^2}{OM} - \frac{\|h\|^2}{OM} = 0$

par Cauchy-Schwarz. Ainsi, F_O est convexe sur chaque ouvert $\mathcal{U}$ convexe ne rencontrant pas O. De plus, l'inégalité $d^2F_O(M)\cdot(h,h) \geq 0$ est stricte si et seulement si h et $\vec{OM}$ ne sont pas colinéaires (par Cauchy-Schwarz).

$\boxtimes$

$\mathcal{D}$] • Fixons $O \in \mathbb{R}^2$ quelconque. Pour $M \in \mathbb{R}^2$, $X \in \mathbb{R}^2$, $MX \geq MO - OX$ par inégalité triangulaire. Donc $f(M) \geq 3OM - f(O)$.
Ainsi, f tend vers $+\infty$ quand M tend vers l'infini. De plus, $f(M) > f(O)$ dès que $OM > \frac{2}{3} f(O)$. Sur le disque compact de centre O et de rayon $\frac{2}{3}f(O)$, la fonction continue f admet donc un minimum P, qui est alors aussi un minimum sur tout le plan (car $f(P) \leq f(O)$).

• On admet que P se trouve nécessairement dans le triangle, éventuellement au bord, mais $P \neq A, B, C$. f atteint son minimum sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{A,B,C\}$ en P et est C^∞ sur cet ouvert, donc $\vec\nabla f(P) = 0$. Par les calculs du lemme, on a $\vec u + \vec v + \vec w = 0$ où $\vec u = \frac{\vec{AP}}{AP}$, $\vec v = \frac{\vec{BP}}{BP}$ et $\vec w = \frac{\vec{CP}}{CP}$. Donc $1 = \vec w^2 = (\vec u + \vec v)^2 = 1 + 2\vec u\cdot\vec v + 1$

soit $\vec u \cdot \vec v = -\frac{1}{2}$. Ainsi $\widehat{APB} = \frac{2\pi}{3}$. De même pour $\widehat{BPC}$ et $\widehat{CPA}$.

• Ceci est vrai pour tout $P' \in \mathbb{R}^2$ où f atteint son minimum. Cela montre que tous ces points sont à l'intérieur du triangle ABC, qui est un ouvert convexe où $f = F_A + F_B + F_C$ est strictement convexe, car l'un des $d^2F_O(M)\cdot(h,h)$ au moins est >0 pour $O = A, B$ ou C. Cela prouve l'unicité du point P, appelé point de Fermat de ABC.

Si $P \in [A,B]$ strictement dans $\widehat{APB} = \pi \neq \frac{2\pi}{3}$!

h ne peut pas être colinéaire à la fois à $\vec{AM}$, $\vec{BM}$ et $\vec{CM}$ car A,B,C pas alignés !

$\boxtimes$

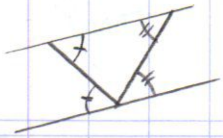
NB : • Si P' est un autre minimum, il est à l'intérieur du triangle, l'application

$$\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \langle \vec\nabla f(tP + (1-t)P'), \vec{P'P}\rangle$$

est bien définie et C^1.

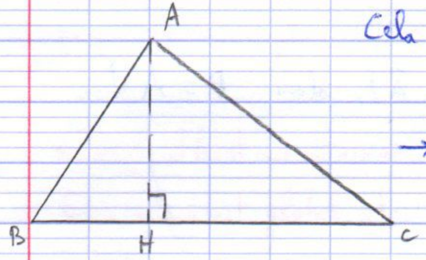
On a $\varphi'(t) = \langle d(\vec\nabla f)(tP + (1-t)P')\cdot[\vec{P'P}], \vec{P'P}\rangle > 0$ par stricte convexité.

Donc $\varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt > 0$. Or $\varphi(1) = \varphi(0) = 0$, absurde.



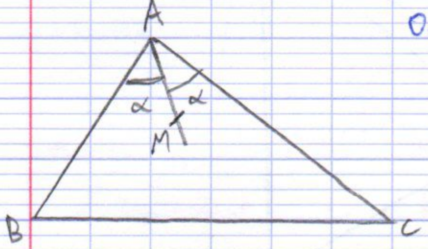
• **P est bien à l'intérieur du triangle, montrons-le.**

→ La somme des angles $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ du triangle vaut π, donc deux au moins sont $< \frac{\pi}{2}$, disons $\hat{B}$ et $\hat{C}$. Le pied H de la hauteur issue de A est alors strictement entre B et C. Donc $f(H) = HA+HB+HC = HA+BC < BA+BC = f(B)$.



Cela prouve que $B \neq P$, et de même $C \neq P$.

→ Si $\hat{A} < \frac{\pi}{2}$, le même raisonnement s'applique.
Sinon, $\frac{\pi}{2} \leq \hat{A} < \frac{2\pi}{3}$. On considère M voisin de A sur la bissectrice intérieure de l'angle $\hat{A} = 2\alpha$.



On a $MB^2 = AB^2 + AM^2 - 2\,AB \cdot AM \cos\alpha$

Donc $$MB = AB\left(1 + \frac{AM^2}{AB^2} - 2\frac{AM}{AB}\cos\alpha\right)^{1/2}$$

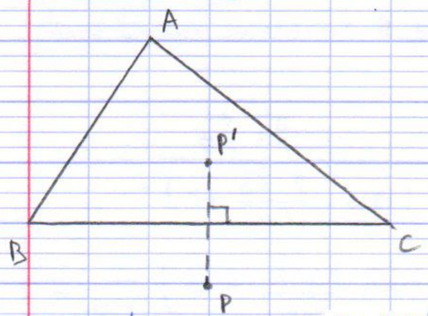
$$= AB - AM\cos\alpha + O(AM^2)$$

De même $MC = AC - AM\cos\alpha + O(AM^2)$.

Donc $f(M) = f(A) + (1 - 2\cos\alpha)\,AM + O(AM^2)$

Comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, on a $1 - 2\cos\alpha < 0$ donc $f(M) < f(A)$ pour M assez proche de A sur la bissectrice. Ainsi, $P \neq A$.

→ Enfin, P est à l'intérieur du triangle. Si il était strictement à l'extérieur, par exemple P et A seraient de part et d'autre de la droite (BC), le symétrique P' de P par rapport à (BC) donne $P'A < PA$, $P'B = PB$ et $P'C = PC$ donc $f(P') < f(P)$, c'est absurde.



• **On peut construire P géométriquement !** (cf schéma →)

On oriente $\mathbb{R}^2$ de sorte que $\vec{AB}, \vec{AC}$ forme une base directe. On obtient B' de C par la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$, centre A. Si M est quelconque et M' son image par la rotation, AMM' est équilatéral donc $f(M) = MA+MB+MC = MM' + MB + M'B' \geq BB'$ par inégalité triangulaire. Avec $M = P$, $M' = P'$ (son transformé) on a $(\vec{PA}, \vec{PB}) = \frac{2\pi}{3}$, $(\vec{PP'}, \vec{PA}) = \pi/3$ donc $(\vec{PP'}, \vec{PB}) = \pi$: B, P, P' alignés dans cet ordre.

De même, $(\overrightarrow{P'B'}, \overrightarrow{P'A}) = (\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}) = \frac{2\pi}{3}$, $(\overrightarrow{P'A}, \overrightarrow{P'P}) = \frac{\pi}{3}$ donc $(\overrightarrow{P'B}, \overrightarrow{P'P}) = \pi$,

donc P, P', B' alignés dans cet ordre. Donc P et P' sont sur la droite (BB').

De plus, $f(P) = BP + PP' + P'B' = BB'$.

On montre de même que $P \in (AA'), (CC')$ et $f(P) = AA' = BB' = CC'$.

- Si l'un des angles est $\geq \frac{2\pi}{3}$ (genre $\hat{A}$), alors $P = A$!