Réf : Seguins Pazzis

Théorème spectral et problèmes d'optimisation

DVT

Énoncé : 0) (Théorème spectral) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et q, φ deux formes quadratiques sur E. On suppose q définie positive. Alors il existe une base de E qui est φ-orthogonale et q-orthonormée.

1) Dans cette base, q est représentée par I_n et φ par $\mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$ où $a_i \in \mathbb{R}$. On peut supposer $a_n \leq \dots \leq a_1$. Alors la fonction $F : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\varphi(x)}{q(x)}$ admet a_1 pour maximum et a_n pour minimum.

2) En fait, les a_k sont les valeurs de F en ses points critiques.

3) Application : $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2 - 3xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2}$ admet $3 - 2\sqrt{\frac{7}{7}}$ pour min, $3 + 2\sqrt{\frac{7}{3}}$ pour max.

D/ 0) • On note b_q, b_φ les formes polaires associées. On raisonne par récurrence sur n la dimension de E. Si $n = 1$, on peut trouver $x \in E$ tel que $q(x) \neq 0$. Alors $x \neq 0$, $\frac{x}{\sqrt{x}}$ est une base de E et est q-orthonormée, trivialement φ-orthogonale.

On suppose le résultat vrai pour les espaces de dimension $< n$ où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

• L'espace (E, b_q) est euclidien car q est définie positive. Ainsi l'application

$$\mathcal{L}(E) \to B(E \times E, \mathbb{R}), \quad u \mapsto ((x,y) \mapsto b_q(x, u(y)))$$

est un isomorphisme. Soit u la préimage de b_φ. La symétrie de b_φ implique la symétrie de u, c'est-à-dire $b_q(x, u(y)) = b_q(u(x), y)$, $\forall x, y \in E$.

Soit S la sphère unité de E et (pour q !) $f : S \to \mathbb{R}$, $x \mapsto b_q(x, u(x))$, $F : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f\left(\frac{x}{\sqrt{q(x)}}\right) = \frac{1}{q(x)} b_q(x, u(x))$.

Comme E est de dimension finie, S est compacte. Comme f est continue, f admet un extrêmum local en un point $x_0 \in E$. Mais alors F admet également un extrêmum local en x_0. (En effet, il existe $r > 0$ tel que $f|_{B(x_0,r) \cap S}$ est extrémal en x_0. Soit $C := \bigcup_{t \in B(x_0,r) \cap S} \mathbb{R}_+^* t$.

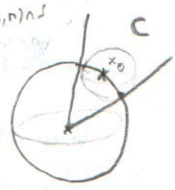
$\|\cdot\|$ désigne $\sqrt{q}$ ici...

C est un cône et $F(C) = f(B(x_0,r) \cap S)$. Ainsi $F_{|C}$ est extrémal en x_0. Justifions que C est un voisinage de x_0. Si $y \in E \setminus \{0\}$ on a

$\left\|\frac{y}{\|y\|} - x_0\right\| \leq \left\|\frac{y}{\|y\|} - y\right\| + \|y - x_0\| = \left|\frac{1}{\|y\|} - 1\right| \|y\| + \|y - x_0\|$.

Si $\|y - x_0\| \leq \varepsilon$, donc $\big|\|y\| - \|x_0\|\big| = \big|\|y\| - 1\big| \leq \varepsilon$ et donc $\left|\frac{1}{\|y\|} - 1\right| \leq \frac{\varepsilon}{\|y\|}$.

Ainsi $\left\|\frac{y}{\|y\|} - x_0\right\| \leq 2\varepsilon$. Donc si $y \in B(x_0, \frac{r}{2}) \setminus \{0\}$, $\frac{y}{\|y\|} \in B(x_0, r) \cap S$ et donc $y \in C$.)



On F est différentiable sur $E\setminus\{0\}$, $dF(x) = \dfrac{1}{q(x)}\Big(b_q(\cdot, u(x)) + b_q(x, u(\cdot))\Big) - \dfrac{2\, b_q(x,\cdot)}{q(x)^2}\, b_q(x, u(x))$.

En x_0, cette différentielle s'annule. Comme $x_0 \in S$, $q(x_0) = 1$. Donc

pour tout $y \in E$, $dF(x_0)\cdot y = 0 = b_q(y, u(x_0)) + \underbrace{b_q(x_0, u(y))}_{= b_q(u(x_0), y) \text{ par symétrie}} - 2\, b_q(x_0, y)\, b_q(x_0, u(x_0))$.

On rassemble les termes : $b_q\big(y, u(x_0) - b_q(x_0, u(x_0))\, x_0\big) = 0$, $\forall y \in E$.
(et on divise par 2)

Ceci implique que $u(x_0) = b_q(x_0, u(x_0))\, x_0$ par non-dégénérescence de b_q.

Donc x_0 est vecteur propre de u. Comme u est symétrique, $x_0^{\perp_q}$ est u-stable.

On en déduit que $E = \mathbb{R}x_0 \overset{\perp_q}{\oplus} x_0^{\perp_q} = \mathbb{R}x_0 \overset{\perp_\varphi}{\oplus} x_0^{\perp_q}$. On conclut par hypothèse de récurrence à l'existence d'une base comme on veut sur $x_0^{\perp_q}$, qu'on concatène avec x_0. $\blacksquare$

1) On reprend les notations de l'énoncé. Dans notre base fixée, si $t \in \mathbb{R}$, la matrice représentant la forme $\varphi - tq$ est $\begin{bmatrix} a_1 - t & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n - t \end{bmatrix}$ avec $a_n \leq \dots \leq a_1$.

Ainsi, $\varphi - a_1 q \leq 0$ et $\varphi - a_n q \geq 0$. Donc $a_n q \leq \varphi \leq a_1 q$, ce qui prouve que F a pour maximum a_1 (atteint en le 1er vecteur de la base) et pour minimum a_n (atteint en le dernier).

2) On constate que $\{a_1, \dots, a_n\}$ est l'ensemble des réels t tels que $\varphi - tq$ est dégénérée.

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base de travail. (q-orthonormée, φ-orthogonale, $\varphi(e_k) = a_k$).

F est différentiable sur $E\setminus\{0\}$, de différentielle $dF(x) = \dfrac{2}{q(x)}\Big(b_\varphi(x,\cdot) - \dfrac{b_q(x,\cdot)}{q(x)}\varphi(x)\Big)$.

Pour $x = e_k$, $dF(e_k) = 2\big(b_\varphi(e_k, \cdot) - a_k\, b_q(e_k, \cdot)\big)$. Cette forme linéaire est nulle sur e_i pour $i \neq k$ par q,φ-orthogonalité, et en e_k car $\varphi(e_k) = a_k\, q(e_k)$.

Donc e_k est un point critique, et $F(e_k) = a_k$: on a un sens.

Réciproquement, si $x \in E\setminus\{0\}$ est un point critique, on a $dF(x) = 0$ donc

$b_\varphi(x,\cdot) - \dfrac{b_q(x,\cdot)}{q(x)}\varphi(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(\varphi - tq)$ où $t = \dfrac{\varphi(x)}{q(x)}$.

Par la 1ère remarque, $\varphi - t q$ étant dégénéré, t est égal à l'un des a_k ie $F(t) = a_k$, ce que nous voulions.

3) $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ $\qquad$. On pose $\varphi(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ 2 formes quadratiques.

$(x,y) \mapsto \dfrac{x^2 - 3xy + 2y^2}{x^2 + xy + y^2}$ $\qquad$ $q(x,y) = x^2 + xy + y^2$.

q est définie positive. On cherche le min et le max de l'ensemble des t tels que $\varphi - tq$ est dégénérée. Ces réels sont solutions de l'équation $\begin{vmatrix} 1-t & -\frac{3+t}{2} \\ -\frac{3+t}{2} & 2-t \end{vmatrix} = 0$ (écrire φ et q dans la base canonique).

ie $3t^2 - 18t - 1 = 0$. $\qquad \Delta = 18^2 + 3 \cdot 4 = 336 = 3 \cdot 7 \cdot 2^4$

Les racines sont $t_{min} = \dfrac{18 - 4\sqrt{3 \cdot 7}}{2 \cdot 3} = 3 - 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ et $t_{max} = 3 + 2\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.