Ref : Chambert-Loir

Étude d'une suite définie par récurrence

DEV

Énoncé : Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\alpha + \beta = 1$. Soit $S : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$, $z \mapsto \alpha z + \frac{\beta}{z}$, on définit par récurrence la suite $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $z_{n+1} = S(z_n)$.

Si $\mathrm{Re}(z_0) = 0$, la suite (z_n) n'est plus définie à partir d'un certain rang ou ne converge pas.

Si $\mathrm{Re}(z_0) \neq 0$, (z_n) (est bien déf) converge vers 1 si $\mathrm{Re}(z_0) > 0$, vers -1 sinon.

Dém :

- Supposons d'abord $\mathrm{Re}(z_0) = 0$: $z_0 = iy_0$ où $y_0 \in \mathbb{R}^*$. Alors $z_1 = i\alpha y_0 - i\frac{\beta}{y_0}$ est encore imaginaire pur. Par récurrence, tant que z_n est défini, on a $z_n = iy_n$ où $y_n \in \mathbb{R}$, et $y_{n+1} = \alpha y_n - \frac{\beta}{y_n} =: f(y_n)$

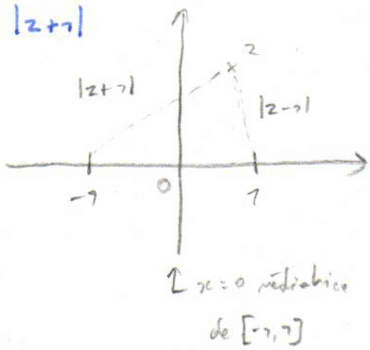
  Si (y_n) est définie pour tout n et converge vers un $y_* \in \mathbb{R}$, comme $f : y \mapsto \alpha y - \frac{\beta}{y}$ est continue, on doit avoir $f(y) = y$, donc $y^2 \underbrace{(1-\alpha)}_{>0} = \underbrace{-\beta}_{<0}$ donc y ne peut pas être réel !

  Ainsi, (y_n) n'est pas bien définie, ou bien ne converge pas.

- Supposons $z_0 = x_0 + iy_0$ avec $x_0 > 0$. Alors $z_1 = \alpha(x_0 + iy_0) + \frac{x_0 - iy_0}{|z_0|^2}\beta$ est de partie réelle $\left(\alpha + \frac{\beta}{|z_0|^2}\right)x_0 > 0$. Par récurrence, la suite (z_n) est donc bien définie, et $\mathrm{Re}(z_n) > 0$ pour tout n.

  Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ et $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, et posons

  $\varphi : \mathbb{H} \to \Delta$, $z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$. φ est bien définie car si $\mathrm{Re}(z) > 0$, $|z-1| < |z+1|$

  et son inverse est $\psi : \Delta \to \mathbb{H}$, $z \mapsto \frac{1+z}{1-z} = \frac{1 - |z|^2 + 2i\,\mathrm{Im}(z)}{|1-z|^2}$, bien définie.

  Ainsi $\varphi : \mathbb{H} \xrightarrow{\sim} \Delta$ est un biholomorphisme.

- Posons $t_n := \varphi(z_n)$. Alors $t_{n+1} = T(t_n)$ où $T(z) = \varphi \circ S \circ \psi(z) = \frac{S\circ\psi(z) - 1}{S\circ\psi(z) + 1}$

  et $S\circ\psi(z) = \alpha\psi(z) + \frac{\beta}{\psi(z)} = \alpha\frac{1+z}{1-z} + \beta\frac{1-z}{1+z} = \frac{\alpha(1+z)^2 + \beta(1-z)^2}{(1-z)(1+z)} = \frac{z^2 + 2(\alpha-\beta)z + 1}{(1-z)(1+z)}$ car $\alpha + \beta = 1$.

  donc $T(z) = \frac{z^2 + 2(\alpha-\beta)z + 1 - (1-z^2)}{z^2 + 2(\alpha-\beta)z + 1 + (1-z^2)} = z\,\frac{z + (\alpha-\beta)}{1 + (\alpha-\beta)z}$. Soit $u := \alpha - \beta$, on a $|u| < 1$.

Si $z=x+iy$, on a $|z+u|^2 = |z|^2+2xu+u^2$ et $|1+zu|^2 = 1+u^2|z|^2+2ux$.
avec $|z|<1$

$$\text{Donc } |1+uz|^2-|z+u|^2 = (1-u^2)(1-|z|^2) > 0$$

et donc $|T(z)| < |z|$. Cela prouve que la suite $|t_n|$ est décroissante strictement, minorée, donc convergente.

- Si $|t_n| \to 0$, alors $t_n \to 0$ et $z_n \to \varphi(0)=1$. Sinon, supposons $|t_n| \to r > 0$.

  Alors $\left|\frac{t_{n+1}}{t_n}\right| = \left|\frac{t_n+u}{1+ut_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Soit t une valeur d'adhérence de (t_n).

  Alors $|t| = r > 0$ donc $t \neq 0$. De plus, par passage à la limite, $\frac{|t+u|}{|1+ut|} = 1$. Si $t=x+iy$,

  on aura $1+u^2|t|^2+2ux = |t|^2+2ux+u^2$ donc $(1-u^2)(1-|t|^2) = 0$,

  donc $|t|=1$. Or, $|t| = \lim |t_n| < |t_0| < 1$ par décroissance : absurde.

  Ainsi, $|t_n| \to 0$ et donc $z_n \to 1$.

- Si $Re(z_0) < 0$, avec $z'_0 := -z_0$ et $z'_{n+1} = S(z'_n)$, on a $z'_n = -z_n$ $\forall n$

  et $z'_n \to 1$, donc $z_n \to -1$. ☒

⚠ DA de (z_n) ! Ça a l'air compliqué...