Ref : Berthelin

# Théorème de comparaison de Sturm

DEV

**Énoncé :** On considère les équations différentielles

$(E_1)$ $(a(t)x')' + r(t)x = 0$ $\qquad$ $(E_2)$ $(b(t)y')' + s(t)y = 0$

avec $a, b \in C^1(I, \mathbb{R})$, $r, s \in C(I, \mathbb{R})$ où $I$ intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose $r \leq s$ et $0 < b \leq a$. Soit $x, y$ deux solutions non nulles de $(E_1)$, $(E_2)$ respectivement. Soit $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de $x$. Si $x$ et $y$ ne sont pas proportionnelles sur $]t_1, t_2[$ alors $y$ admet au moins un zéro dans $]t_1, t_2[$.

**D/** On suppose que $y$ ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$. Soit $W := \frac{x}{y}(ax'y - bxy')$ sur $]t_1, t_2[$. Alors

$$W' = \left(\frac{x'}{y} - \frac{xy'}{y^2}\right)(ax'y - bxy') + \frac{x}{y}\left((ax')'y + ax'y' - (by')'x - by'x'\right)$$

$$= ax'^2 - b\frac{xx'y'}{y} - a\frac{xx'y'}{y} + b\frac{x^2y'^2}{y^2} + \frac{x}{y}\left(-rxy + ax'y' + syx - by'x'\right)$$

$$= ax'^2 - 2b\frac{xx'y'}{y} + b\frac{x^2y'^2}{y^2} + (s-r)x^2$$

$$\leadsto \quad W' = (s-r)x^2 + (a-b)x'^2 + b\left(x' - \frac{xy'}{y}\right)^2$$

Soit $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ tels que $\varepsilon + \varepsilon' < t_2 - t_1$. Alors $t_1 + \varepsilon < t_2 - \varepsilon'$. On intègre :

$$W(t_2 - \varepsilon') - W(t_1 + \varepsilon) = \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2-\varepsilon'} (s-r)x^2\,dt + \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2-\varepsilon'} (a-b)x'^2\,dt + \int_{t_1+\varepsilon}^{t_2-\varepsilon'} b\left(x' - \frac{xy'}{y}\right)^2 dt.$$

• Notons que $W(t_1+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ : en effet, si $y(t_1) \neq 0$ alors c'est clair et si $y(t_1) = 0$, $t_1$ est nécessairement un zéro simple à la fois de $x$ et de $y$. Donc

$$x(t) \underset{t \to t_1}{\sim} x'(t_1)(t - t_1) \qquad y(t) \underset{t \to t_1}{\sim} y'(t_1)(t - t_1)$$

et $x'(t_1), y'(t_1) \neq 0$ donc $W'(t_1+\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \frac{x'(t_1)}{y'(t_1)}\left(a(t_1)x'(t_1)\underbrace{y(t_1)}_{0} - b(t_1)\underbrace{x(t_1)}_{0}y'(t_1)\right) = 0$

De même, $W(t_2 - \varepsilon') \xrightarrow[\varepsilon' \to 0]{} 0$. Enfin, les deux premières intégrales ne posent pas de problème lorsque $\varepsilon, \varepsilon' \to 0$ donc la troisième non plus nécessairement : elle est convergente.

Ainsi, $0 = \int_{t_1}^{t_2} (s-r)x^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} (a-b)x'^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} b\left(x' - \frac{xy'}{y}\right)^2 dt$

Comme $s-r \geq 0$ et $a-b \geq 0$, $b \geq 0$, tous ces termes sont positifs. Ils sont donc tous nuls ! En particulier le dernier : $\int_{t_1}^{t_2} b\left(x' - \frac{xy'}{y}\right)^2 dt = 0$. Comme $b > 0$, on doit avoir $x' - \frac{xy'}{y} = 0$ sur $]t_1, t_2[$. Comme $x$ ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$, on a $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ : il y a proportionnalité, ce qui est contradictoire.

Donc $\ln|x| = \ln|y| + cte$ → $|x| = e^{cte}|y|$ sur $]t_1, t_2[$ : $x$ y a un signe cte, $y$ aussi.

NB1 : On peut parler de zéros consécutifs de $x$ ! En effet,

Soit l'équation différentielle $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ avec $p, q \in C(I, \mathbb{R})$ où $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors les 0 d'une solution non nulle $y$ sont simples et isolés. En particulier, nombre fini de zéros sur tout compact.

Dém : Soit $t_0 \in I$ un zéro de $y$. Alors $y'(t_0) \neq 0$ : dans le cas contraire, $y$ serait solution du problème de Cauchy $\begin{cases} z'' + pz' + qz = 0 \\ z(t_0) = z'(t_0) = 0 \end{cases}$, dont la fonction $z \equiv 0$ est aussi solution. Puisqu'il y a unicité, $y \equiv 0$ : absurde.

Ainsi les zéros de $y$ sont simples. Ils sont donc nécessairement isolés : si $t_0$ est un zéro de $y$, pour $t \in I$ on a $y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = (t-t_0)\underbrace{\int_0^1 y'((t-t_0)s+t_0)\,ds}_{=:g(t)}$.

Comme $y$ est $C^2$ et $[0,1]$ compact, $g$ est $C^1$.

De plus, $g(t_0) = f'(t_0) \neq 0$. Donc $g$ ne s'annule pas au voisinage de $t_0$ : $t_0$ est isolé.

Notons que $y$ change donc de signe en chacun de ses zéros : elle oscille.

Corollaires : * Soit $x$ une solution non nulle de $(E_1)$. On suppose $a \geq 1$ et $r \leq \rho^2$ où $\rho > 0$. Alors deux zéros consécutifs $t_1 < t_2$ de $x$ vérifient $t_2 - t_1 \geq \frac{\pi}{\rho}$.

* Soit $y$ une solution de $(E_2)$ avec $0 < b \leq 1$ et $s \geq \sigma^2$ où $\sigma > 0$. Alors $y$ s'annule au moins une fois dans tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{\sigma}$ : ses zéros consécutifs sont à distance inférieure ou égale à $\pi/\sigma$.

D] * Soient $t_1 < t_2$ deux zéros consécutifs de $x$. On compare $x$ à $y$ solution de $(E_2') : y'' + \rho^2 y = 0$.

On choisit $y(t) = \sin(\rho t + C)$ où $C$ est quelconque réel.

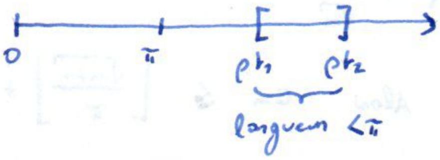
Le théorème de Sturm s'applique à condition que $x$ et $y$ ne soient pas proportionnelles sur $]t_1, t_2[$. Si c'était le cas, nous aurions aussi $y(t_1) = y(t_2) = 0$ ; on exclut cette possibilité en choisissant $C$ de sorte que $\rho t_1 + C, \rho t_2 + C \notin \pi\mathbb{Z}$.

Ainsi, $y$ s'annule au moins une fois sur $]t_1, t_2[$, pour tout choix de $C$ :

$$\forall C \in \mathbb{R} \text{ tq } \rho t_1 + C, \rho t_2 + C \notin \pi\mathbb{Z} ; \exists s \in ]t_1, t_2[, k \in \mathbb{Z} \text{ tq } \rho s + C = k\pi.$$

Donc $\rho t_1 + C < k\pi < \rho t_2 + C$, et donc $\rho(t_2 - t_1) \geq \pi$ (sinon, $\rho(t_2 - t_1) < \pi$

et il existerait $C$ tel que $0 < \rho t_1 + C < \rho t_2 + C < \pi$




et donc pas de multiple de $\pi$ entre $\rho t_1 + C$ et $\rho t_2 + C$ !)

* Si $y \equiv 0$ c'est clair. Sinon, soit $[t_1, t_2]$ un intervalle de longueur $\frac{\pi}{\sigma}$. Supposons que $y$ ne s'y annule pas. Soit $x(t) := \sin(\sigma(t - t_1))$. $x$ s'annule en $t_1$ et en $t_2$, et est solution de $(E_1')$ : $x'' + \sigma^2 x = 0$. Donc $x$ et $y$ ne sont pas proportionnelles sur $]t_1, t_2[$ et donc $y$ a un zéro dans $]t_1, t_2[$ ! Absurde. ☐

Exemple : Les zéros consécutifs des solutions non nulles de $(2 + \sin t)y'' + (\cos t)y' + (2 + \cos t)y = 0$ sont à distance au moins $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$, au plus $\sqrt{3}\pi$.

D] C'est une équation de Sturm-Liouville $(A(t)y')' + R(t)y = 0$ avec $A(t) = 2 + \sin t$, $R(t) = 2 + \cos t$. Donc $1 \leq A, R \leq 3$. Comme $A \geq 1$, $R \leq (\sqrt{3})^2$, on sait que 2 zéros consécutifs $t_1 < t_2$ vérifient $t_2 - t_1 \geq \frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

De plus, $y$ est solution de $\left(\frac{1}{3}A(t)y'\right)' + \frac{R(t)}{3}y = 0$. Comme $\frac{A}{3} \leq 1$ et $\frac{R}{3} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$, on sait que $t_2 - t_1 \leq \sqrt{3}\pi$. ☐

Application : On considère $x'' - \rho(t)x = 0$ où $\rho$ est continue positive sur $I$. Alors toute solution non nulle possède au plus un zéro.

D] On compare $x'' - \rho(t)x = 0$ et $y'' = 0$. Comme $-\rho \leq 0$, c'est OK. Supposons que $x$ ait 2 zéros consécutifs $t_1 < t_2$. Alors toute solution $y$ non proportionnelle à $x$ sur $]t_1, t_2[$ en a un. Contradiction avec $y \equiv 1$ sur $]t_1, t_2[$. ☐

Application : Soit $y$ une solution non nulle de $y''+ty=0$ (E). Elle a au plus un zéro sur $]-\infty,0]$ et une infinité sur $]0,+\infty[$. Si $a_n := |\{\text{zéros de } y \text{ dans } [0,n]\}|$, alors $a_n \sim \frac{2}{3\pi} n^{3/2}$ (II y !)

D]. Cauchy-Lipschitz linéaire : les solutions maximales sont bien définies sur $\mathbb{R}$.

- Par l'application précédente, au plus un zéro sur $]-\infty,0]$. Fixons $\varepsilon>0$. On compare (E) à (E') : $y''+\varepsilon y=0$ sur $[\varepsilon,+\infty[$. Comme $t\geq\varepsilon$, il y a un zéro de $y$ solution non nulle de (E) sur tout intervalle de $[\varepsilon,+\infty[$ de longueur $\frac{\pi}{\sqrt{\varepsilon}}$, donc une infinité dans $[0,+\infty[$.

- Fixons $n\in\mathbb{N}$. Sur $[n,n+1[$, on compare (E) à (E-) : $y''+ny=0$ et à (E+) : $y''+(n+1)y=0$.

Deux zéros consécutifs de $y$ dans $[n,n+1[$ sont distants d'au moins $\frac{\pi}{\sqrt{n+1}}$, et au plus $\frac{\pi}{\sqrt{n}}$. Soit $c_n$ le nombre de zéros de $y$ dans $[n,n+1[$.

(Combien d'intervalles de longueur $l=\frac{\pi}{\sqrt{n+1}}, \frac{\pi}{\sqrt{n}}$ dans $[0,1[$ ?)

Alors $c_n \leq \left\lfloor \frac{\sqrt{n+1}}{\pi} \right\rfloor + 1$ et $c_n \geq \left\lfloor \frac{\sqrt{n}}{\pi} \right\rfloor$.

Donc $c_n \sim \frac{\sqrt{n}}{\pi}$. Comme la série des $\left[\frac{\sqrt{n}}{\pi}\right.$ est divergente, nous avons l'équivalent $a_n \sim \frac{1}{\pi}+\dots+\frac{\sqrt{n}}{\pi}$. Or, $t\mapsto\sqrt{t}$ croît sur $[0,+\infty[$ donc

$$\int_{k-1}^{k}\sqrt{t}\,dt \leq \sqrt{k} \leq \int_{k}^{k+1}\sqrt{t}\,dt \text{ donc } \int_{1}^{n}\sqrt{t}\,dt \leq \sqrt{2}+\dots+\sqrt{n} \leq \int_{2}^{n+1}\sqrt{t}\,dt$$

et donc $1+\frac{2}{3}\left(n^{3/2}-1\right) \leq \sqrt{1}+\dots+\sqrt{n} \leq 1+\frac{2}{3}\left((n+1)^{3/2}-2^{3/2}\right)$

Donc $\sqrt{1}+\dots+\sqrt{n} \sim \frac{2}{3}n^{3/2}$. Ainsi $a_n \sim \frac{2}{3\pi}n^{3/2}$. ∎