Ref : Quéffélec, Topologie

Théorème de la limite simple de Baire

DEV

Énoncé : Soit X un espace métrique complet, Y métrique, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions $X \to Y$ continues convergeant simplement vers $f : X \to Y$. Alors l'ensemble $C(f)$ des points de continuité de f est une intersection dénombrable d'ouverts, dense dans X (ie un G_δ dense).
En particulier, $C(f) \neq \emptyset$!

D/ Lemme Si $x_0 \in X$, on définit l'oscillation de f en x_0 par
$$w(x_0) := \inf_{r>0} \left(\sup_{x,x' \in \overline{B}(x_0,r)} d(f(x),f(x')) \right)$$

Alors $x_0 \in C(f) \iff w(x_0) = 0$, et $\forall \varepsilon > 0$, $O_\varepsilon := \{x_0 \mid w(x_0) < \varepsilon\}$ est un ouvert.

De plus $C(f) = \bigcap_{p\geq 1} O_{1/p}$

D/ • L'équivalence $x_0 \in C(f) \iff w(x_0) = 0$ est vraie par définition même de la continuité.

• Soit $x_0 \in O_\varepsilon$ et δ tel que $w(x_0) < \delta < \varepsilon$. Soit alors $r > 0$ tel que
$$\sup_{x,x' \in \overline{B}(x_0,r)} d(f(x),f(x')) \leq \delta .$$
Si $x_1 \in B(x_0,r)$, on peut trouver $s > 0$

tel que $\overline{B}(x_1,s) \subset B(x_0,r)$. Mais alors $w(x_1) \leq \sup_{x,x' \in \overline{B}(x_1,s)} d(f(x),f(x')) \leq \delta < \varepsilon$.

Ainsi, $x_1 \in O_\varepsilon$. Donc $B(x_0,r) \subset O_\varepsilon$: O_ε est ouvert.

• L'égalité $C(f) = \bigcap_{p\geq 1} O_{1/p}$ est alors claire par le premier point. $\square$

D/ Étape 1 : Pour tout $\varepsilon > 0$, $O_\varepsilon \neq \emptyset$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n := \{x \in X \mid \exists m \geq n \text{ tel que } d(f_m(x), f_n(x)) > \varepsilon\}$.

U_n s'écrit comme $\bigcup_{m=n}^{+\infty} \{x \in X \mid d(f_m(x), f_n(x)) > \varepsilon\}$: chacun de ces ensembles est ouvert car $\begin{array}{rcl} X & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & d(f_m(x), f_n(x)) \end{array}$ est continue, donc U_n est un ouvert.

De plus, si $x \in X$, la suite $(f_m(x))_{m\in\mathbb{N}}$ est convergente donc de Cauchy. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq N$, $d(f_m(x), f_N(x)) \leq \varepsilon$; ie $x \notin U_N$. Cela prouve que $\bigcap_{N\geq 0} U_N = \emptyset$. Comme $\emptyset$ n'est pas dense dans X, le théorème de Baire dit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que U_N n'est pas dense dans X. Donc il existe $x_0 \in X$ et $r_0 > 0$ tel que $B(x_0, r_0) \subset X \setminus U_N$. Comme f_N est continue, il existe $r_1 > 0$ tel que $d(f_N(x), f_N(x_0)) \leq \varepsilon$, pour tout $x \in B(x_0, r_1)$. On pose $r := \min(r_0, r_1)$.

- Soit alors $x \in B(x_0, r)$. On a $d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_N(x)) + d(f_N(x), f_N(x_0)) + d(f_N(x_0), f(x_0))$.

Comme $B(x_0, r) \subset X \setminus U_N$, on sait que $\forall m \geq N$, $d(f_m(x), f_N(x)) \leq \varepsilon$

$d(f_m(x_0), f_N(x_0)) \leq \varepsilon$

donc pour $m \to +\infty$: $d(f(x), f_N(x)) \leq \varepsilon$ et $d(f(x_0), f_N(x_0)) \leq \varepsilon$.

De plus, $d(f_N(x), f_N(x_0)) \leq \varepsilon$ (choix de r_1). Donc $d(f(x), f(x_0)) \leq 3\varepsilon$.

Ainsi, si $x, x' \in B(x_0, r)$, $d(f(x), f(x')) \leq 6\varepsilon$ par inégalité triangulaire.

Donc $\omega(x_0) \leq 6\varepsilon < 7\varepsilon$: $\mathcal{O}_{7\varepsilon}$ n'est pas vide, pour tout $\varepsilon > 0$.

Étape 2 : $\mathcal{O}_\varepsilon$ est dense dans X.

Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de X, non vide. $\mathcal{O}$ muni de la distance induite vérifie toujours le théorème de Baire, et la suite $(f_{m|\mathcal{O}})$ converge simplement vers $f_{|\mathcal{O}}$. L'étape 1 s'applique toujours : il existe $x_0 \in \mathcal{O}$ tel que $\omega(f_{|\mathcal{O}}, x_0) < \varepsilon$. Or, comme $\mathcal{O}$ est ouvert, $\omega(f_{|\mathcal{O}}, x_0) = \omega(f, x_0) < \varepsilon$. Ainsi $x_0 \in \mathcal{O}_\varepsilon \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. $\mathcal{O}_\varepsilon$ est donc dense.

CCL : Par le théorème de Baire, $C(f) = \bigcap_{p\geq 1} \mathcal{O}_{1/p}$ est dense dans X.

Application : Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable alors f' est continue sur un G_δ dense. En effet, f' est la limite simple de $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto n\left(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\right)$ continues.

NB : « $\mathcal{O}$ vérifie le thm. de Baire » : soit (U_n) des ouverts denses de $\mathcal{O}$. Alors $W_n := \overline{\mathcal{O}}^c \cup U_n$ est un ouvert dense de X. Soit $A \subset \mathcal{O}$ un ouvert non vide, c'est aussi un ouvert de X. Par Baire, $(\bigcap_n W_n) \cap A \neq \emptyset$. Or $(\bigcap_n W_n) \cap A = \bigcap_n (W_n \cap A) = \bigcap_n (U_n \cap A)$ car $A \subset \mathcal{O}$.

Donc $\bigcap_n U_n$ est dense dans $\mathcal{O}$.