Ref : Francinou - Gianella
Algèbre 1

⚠ C'est pas "FGN" !

Idéaux premiers de $K[X,Y]$

DEV

Énoncé : Soit K un corps. Les idéaux premiers de $K[X,Y]$ sont exactement les idéaux

(0) ; (P) où $P(X,Y)$ est irréductible ; $(P(X), R(X,Y))$ où $P(X) \in K[X]$ est irréductible et $\overline{R(X,Y)} \in (\underbrace{K[X]/(P)}_{\text{corps}})[Y]$ est irréductible.

Ces derniers idéaux à 2 générateurs sont en fait maximaux.

D] * **Lemme** : Soient $F, P \in K[X,Y] \setminus \{0\}$. Il existe $Q, R \in K[X,Y]$ et $a(X) \in K[X] \setminus \{0\}$ tels que
- $a(X) F(X,Y) = P(X,Y) Q(X,Y) + R(X,Y)$
- $\deg_Y(R) < \deg_Y(P)$

D] $K(X)$ est un corps donc nous pouvons effectuer la division euclidienne de F par P dans $K(X)[Y]$, qu'on considère comme des éléments de $K[X][Y]$.

Il existe donc $(Q', R') \in K(X)[Y]$ tels que $\deg_Y(R') < \deg_Y(P)$ et $F = PQ' + R'$.

Soit $a(X) \in K[X]$ le PPCM des dénominateurs des coefficients des polynômes Q' et R'.

Alors $Q(X,Y) := a(X) Q'(X,Y)$ et $R(X,Y) := a(X) R'(X,Y)$ sont dans $K[X][Y]$, $a(X)$ est non nul et on a bien $a(X) F(X,Y) = P(X,Y) Q(X,Y) + R(X,Y)$. □

* Soit $\mathcal{M}$ un idéal premier de $K[X,Y]$. Si $\mathcal{M}$ est principal, on a bien $\mathcal{M} = 0$ ou $\mathcal{M} = (P)$ où P est premier dans $K[X,Y]$, donc irréductible ($K[X]$ factoriel $\Rightarrow$ $K[X,Y]$ factoriel).

Supposons que $\mathcal{M}$ n'est pas principal. Nous allons montrer que $\mathcal{M}$ est automatiquement maximal, de la forme annoncée.

→ $\mathcal{M} \neq (0)$. Nous considérons les polynômes de $\mathcal{M} \setminus \{0\}$ de degré minimal en Y. Parmi ceux-là, on choisit $P(X,Y)$ de degré minimal en X. Montrons que P est irréductible. S'il ne l'était pas, $P(X,Y) = AB$ avec A, B non constants. Donc $AB \in \mathcal{M}$ premier : on peut supposer $A \in \mathcal{M}$, et $A \neq 0$. Comme $A | P$ dans $K[X,Y]$ on a $\deg_X(A) \leq \deg_X(P)$ et $\deg_Y(A) \leq \deg_Y(P)$. Comme le degré de P en X est minimal, $\deg_X(A) = \deg_X(P)$. Comme son degré en Y est minimal parmi ceux de degré minimal en X, on a $\deg_Y(A) = \deg_Y(P)$. Mais alors $\deg_X(B) = \deg_Y(B) = 0$ et donc B est constant.
C'est absurde.

→ Comme $\mathfrak{m}$ n'est pas principal, $\mathfrak{m} \neq (P)$. Soit $F \in \mathfrak{m} \setminus (P)$. Par le lemme, on a Q, R, a tels que $R(X,Y) = a(X)\,F(X,Y) - P(X,Y)\,Q(X,Y) \in \mathfrak{m}$ et $\deg_Y(R) < \deg_Y(P)$.

Par minimalité, $R = 0$. Donc $P \mid a(X)F(X,Y)$. Or $K[X,Y]$ est factoriel, P irréductible et $P \nmid F(X,Y)$ $\rightsquigarrow$ $P \mid a(X)$. Ainsi, $\deg_Y(P) = 0$ ie $P(X,Y) = P(X)$.

Il existe donc $P(X) \in \mathfrak{m}$ irréductible. De même, il existe $Q(Y) \in \mathfrak{m}$ irr.

$\rightsquigarrow$ Soit $\bar{\mathfrak{m}}$ (resp $\bar{Q}$) l'image de $\mathfrak{m}$ (resp Q) par la surjection $K[X][Y] \twoheadrightarrow (K[X]/(P))[Y]$.
$\bar{\mathfrak{m}}$ est un idéal car le morphisme est surjectif. De plus, $\bar{\mathfrak{m}} \neq 0$ car $\bar{Q} \in \bar{\mathfrak{m}}$ est non nul car $\deg_X(Q) = 0$.

On a : $$K[X,Y]/\mathfrak{m} \simeq (K[X]/(P))[Y]/\bar{\mathfrak{m}}.$$

Comme $\mathfrak{m}$ est premier, ces quotients sont intègres donc $\bar{\mathfrak{m}}$ est premier. Or, $(K[X]/(P))[Y]$ est principal, donc $\bar{\mathfrak{m}}$ est maximal. Ces quotients sont donc des corps : $\mathfrak{m}$ est maximal !

$\rightsquigarrow$ Soit $\overline{R(X,Y)}$ un générateur de $\bar{\mathfrak{m}}$ et $R(X,Y) \in \mathfrak{m}$ un représentant.
Alors $\overline{R(X,Y)}$ est irréductible et on a bien $\mathfrak{m} = (P(X), R(X,Y))$.

Réciproquement, si $\mathfrak{m} := (P(X), R(X,Y))$ est de la forme prescrite, alors

$$K[X,Y]/\mathfrak{m} \simeq \underbrace{\Big(\underbrace{K[X]/(P(X))}_{\text{corps}}\Big)[Y]}_{\text{anneau principal}} \Big/ \left(\overline{R(X,Y)}\right)$$: c'est un corps ! ∎

Rq 1 : Dans le cas où $\mathfrak{m} = (P(X), R(X,Y))$, le quotient $K[X,Y]/\mathfrak{m}$ est en fait une extension finie du corps K.

2) En effet, ce quotient est bien un corps et on a l'isomorphisme ci-dessus. La dimension du $K[X]/(P)$-espace vectoriel $(K[X]/(P))[Y]/(\overline{R(X,Y)})$ est $\deg_Y(\bar{R})$, et la dimension du K-espace vectoriel $K[X]/(P)$ est $\deg_X(P)$. Donc le quotient total $K[X,Y]/\mathfrak{m}$ est de degré $\deg_X(P)\deg_Y(\bar{R})$ sur K. ∎

Rq2 : Si K est infini, les idéaux maximaux de $K[X,Y]$ sont exactement les $(P(X), R(X,Y))$ décrits précédemment.

$\mathcal{D}$) Il s'agit de montrer qu'un idéal principal (P) ne peut pas être maximal. Par l'absurde, supposons $(P(X,Y))$ maximal. En particulier, $P(X,Y) \neq 0$ car $K[X,Y]$ n'est pas un corps (!) et $P(X,Y)$ n'est pas constant (sinon inversible : $(P(X,Y)) = K[X,Y]$!).

On peut supposer $\deg_Y(P) \geq 1$. On écrit $P(X,Y) = P_n(X)Y^n + \dots + P_1(X)Y + P_0(X)$ avec $P_i(X) \in K[X]$, $P_n \neq 0$, $n \geq 1$. Comme K est infini, il existe $z \in K$ non racine de P_n. Alors $X - z \notin (P)$. Soit $I := (P, X-z)$. I contient (P) strictement donc $I = K[X,Y]$. Il existe donc A, B tels que $1 = P(X,Y)A(X,Y) + (X-z)B(X,Y)$.

Mais alors $1 = P(z,Y)A(z,Y)$: $P(z,Y)$ est un polynôme en Y de degré 0, donc $n = 0$! Absurde. ▨

Rq3 : En fait, plus généralement, la remarque 2 est vraie pour n'importe quel corps !

$\mathcal{D}$) Il reste à traiter le cas des corps finis $K = \mathbb{F}_q$. Supposons que $(P(X,Y))$ est maximal dans $\mathbb{F}_q[X,Y]$. De même qu'avant, $P \neq 0$, P n'est pas constant, on peut supposer $\deg_Y(P) \geq 1$ et on écrit $P(X,Y) = \underbrace{P_n(X)}_{\neq 0} Y^n + \dots + P_1(X)Y + P_0(X)$. Comme $\mathbb{F}_q[X]$ contient une infinité de polynômes irréductibles (cf : les facteurs irréductibles de $\Phi_{q^n-1}(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ sont de degré n), il existe $\pi(X) \in \mathbb{F}_q[X]$ irréductible ne divisant pas $P_n(X)$. Comme $\deg_Y(P) = n \geq 1$, on sait que $P(X,Y) \nmid \pi(X)$ donc $\overline{\pi(X)}$ est inversible dans le corps $\mathbb{F}_q[X,Y]/_{(P(X,Y))}$: il existe $S(X,Y)$, $T(X,Y)$ tels que $\pi(X)S(X,Y) + P(X,Y)T(X,Y) = 1$. On plonge cette relation dans $\underbrace{\left(\mathbb{F}_q[X]/_{(\pi(X))}\right)}_{\text{corps}}[Y]$: $\overline{P(X,Y)T(X,Y)} = 1$. Donc $\overline{P(X,Y)}$ est un polynôme de degré 0 en Y.

Or $\overline{P(X,Y)} = (P_n \bmod \pi)Y^n + \dots + (P_1 \bmod \pi)Y + (P_0 \bmod \pi)$.

Comme $\pi \nmid P_n$, nous avons une contradiction. ▨

Rq4 : Si K est algébriquement clos (eg $K = \mathbb{C}$), les idéaux maximaux de $K[X,Y]$ ont la forme $(X-a, Y-b)$.

$\mathcal{D}$) K est infini donc un idéal maximal $\mathfrak{m}$ n'est pas principal. Soient $P(X), Q(Y) \in \mathfrak{m}$ irréductibles (cf. la preuve). Comme K est algébriquement clos, $P(X) = X-a$, $Q(Y) = Y-b$ où $a, b \in K$.

Alors $K[X,Y]/_{(X-a,Y-b)} \simeq \left(K[X]/_{(X-a)}\right)[Y]/_{(Y-b)} \simeq K[Y]/_{(Y-b)} \simeq K$ est un corps.

Donc l'idéal $I := (X-a, Y-b)$ est maximal, contenu dans $\mathfrak{m}$. Donc $\mathfrak{m} = (X-a, Y-b)$. ▨

Rq5 : Si $K=\mathbb{R}$, et $\mathfrak{m}$ est maximal alors $\mathbb{R}[X,Y]/\mathfrak{m}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$.

Dans le cas de $\mathbb{R}$, on a $\mathfrak{m}=(X-a,Y-b)$ où $a,b\in\mathbb{R}$.

Dans le cas de $\mathbb{C}$, $\mathfrak{m}=(P(X),Q(X,Y))$ avec $P(X)$ irréductible de $\mathbb{R}[X]$ et $Q(X,Y)=aX+Y+b$, $a,b\in\mathbb{R}$.
(ou inversement en $X\leftrightarrow Y$)

D] Le quotient est bien un corps, c'est une extension finie de $\mathbb{R}$. Elle est monogène par le théorème de l'élément primitif.
Le polynôme minimal d'un générateur est irréductible de $\mathbb{R}[X]$ donc de degré 1 ou 2.

Si degré 1, $\mathbb{R}[X,Y]/\mathfrak{m}\simeq\mathbb{R}$. Si degré 2, $\mathbb{R}[X,Y]/\mathfrak{m}\simeq\mathbb{C}$.

- On reconsidère $P(X),Q(Y)\in\mathfrak{m}$. P,Q sont irréductibles de $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{R}[Y]$ donc de degré 1 ou 2.

→ Si $P(X)=X-a$ et $Q(Y)=Y-b$, alors $\mathbb{R}[X,Y]/(X-a,Y-b)\simeq\left(\mathbb{R}[X]/(X-a)\right)[Y]/(Y-b)$
$\simeq\mathbb{R}[Y]/(Y-b)\simeq\mathbb{R}$ donc $I:=(X-a,Y-b)$ est maximal et inclus dans $\mathfrak{m}$. Donc $\mathfrak{m}=I$.

→ Sinon l'un des deux est de degré 2, par exemple $P(X)$

Alors $\bar{\mathfrak{m}}$ est un idéal principal maximal de $\left(\mathbb{R}[X]/(P)\right)[Y]\simeq\mathbb{C}[Y]$. Donc $\mathbb{R}[X,Y]/\mathfrak{m}\simeq$ $\mathbb{C}[Y]/\bar{\mathfrak{m}}\simeq\mathbb{C}$ (car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos et $\mathbb{C}[Y]/\bar{\mathfrak{m}}$ est une extension finie de $\mathbb{C}$).

D'autre part, $\bar{\mathfrak{m}}=(Y+\bar{\alpha})$ où $\bar{\alpha}\in\mathbb{R}[X]/(P)$: les irréductibles de $\mathbb{C}[Y]$ sont bien de degré 1 ! On peut écrire $\bar{\alpha}=\overline{aX+b}$ où $a,b\in\mathbb{R}$. Mais comme $P\in\mathfrak{m}$, nous avons $Y+aX+b\in\mathfrak{m}$, et finalement $\mathfrak{m}=(P(X),Y+aX+b)$.