Ref : Senne, Matrice

DEV

Structure des groupes classiques

Pré-requis :
- Décomposition polaire : $GL_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{H}_n^{++} \times \mathbb{U}_n$ $\quad GL_n(\mathbb{R}) \simeq S_n^{++} \times O_n$
- $\exp : \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{H}_n^{++}$ est un homéomorphisme
- Si $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ sous-groupe stable par $\cdot^*$ et $G \cap \mathbb{H}_n^{++}$ stable par $\sqrt{\cdot}$. Alors G est stable par décomposition polaire et $G \simeq (G \cap \mathbb{U}_n) \times (G \cap \mathbb{H}_n^{++})$

Énoncé : Soit $J \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $J^2 = \pm I_n$. Soit $G := \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid M^* J M = J\}$.
G est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$, homéomorphe à $(G \cap \mathbb{U}_n) \times \mathbb{R}^d$ pour un certain $d \in \mathbb{N}^*$

Dém **Lemme :** G est stable par décomposition polaire. De plus, si $M \in G$, $|\det M| = 1$.

Dém
- Si $M \in G$, $\det J = \det M \det M^* \det J$ donc $|\det M| = 1$: $G \subset GL_n(\mathbb{C})$.
- Si $M, N \in G$ on a $M^* J M = J \Rightarrow (M^{-1})^* J M^{-1} = J \Rightarrow M^{-1} \in G$

$$(MN)^* J (MN) = N^* (M^* J M) N = N^* J N = J \text{ donc } G \text{ groupe.}$$

- Si $M \in G$, on a $M^* J M (J M^*) = J^2 M^* = \pm M^* = M^* J^2$.

On simplifie par $M^* J$ à gauche. On obtient $M J M^* = J$ donc $M^* \in G$.

- Soit $M \in G$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $M^k \in G$ donc $(M^*)^k J = J M^{-k}$. Par linéarité, si $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P(M^*) J = J P(M^{-1})$. Supposons $M \in G \cap \mathbb{H}_n^{++}$.

Alors $M = U^* \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n) U$ où $U \in \mathbb{U}_n$ et $d_i \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit $A = \{d_i\} \cup \{\frac{1}{d_i}\}$. Il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(a) = \sqrt{a}$, pour tout $a \in A$.

Alors $P(M) = U^* P(\operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n)) U = U^* \operatorname{diag}(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n}) U = \sqrt{M}$.

De plus, $M^{-1} = U^* \operatorname{diag}(\frac{1}{d_1}, \dots, \frac{1}{d_n}) U$ et donc $P(M^{-1}) = \sqrt{M^{-1}} = \sqrt{M}^{-1}$

Comme $M^* = M$, on obtient $P(M) J = J P(M^{-1})$ ie $\sqrt{M} J = J \sqrt{M^{-1}}$ donc $\sqrt{M} \in G$.

Ainsi G est stable par décomposition polaire : $G \simeq (G \cap \mathbb{U}_n) \times (G \cap \mathbb{H}_n^{++})$ $\square$

* Posons $\mathcal{G} := \{N \in M_n(\mathbb{C}) \text{ tel que } \exp(tN) \in G, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

On a $M'(t) = N M(t) = M(t) N$.

Soit $N \in \mathcal{G}$. Posons $\underset{\hookrightarrow C^\infty}{M(t) := \exp(tN)} \in G$. On a $M(t)^* J M(t) = J$.

On dérive cette identité en $t = 0$: $N^* J + J N = 0$. Réciproquement, si $N \in M_n(\mathbb{C})$ tel que $N^* J + J N = 0$. $M(t) = \exp(tN)$. Alors $M(0) = I_n$ et $\frac{d}{dt}(M(t)^* J M(t)) = M^*(t) \underbrace{(N^* J + J N)}_{=0} M(t)$ donc $M(t)^* J M(t) = J$, $\forall t$.

Ainsi $\mathfrak{g} = \{N \in M_n(\mathbb{C}) \mid N^* J + JN = 0\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

* Montrons que $\exp : \mathfrak{g} \cap \mathbb{H}_n \longrightarrow G \cap \mathbb{H}_n^{++}$ est un homéomorphisme. Il s'agit de montrer que cette application est surjective. Soit $M \in G \cap \mathbb{H}_n^{++}$ et N l'unique antécédent dans $\mathbb{H}_n$.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $\lambda \in Sp(M) \cup Sp(M^{-1})$, $P(\lambda) = \ln(\lambda)$ (ok car les λ sont strictement positifs).

On écrit $N = U^* D U$ où D est diagonale.

Alors $M = \exp(N) = U^* \exp(D) U$ et $M^{-1} = \exp(-N) = U^* \exp(-D) U$.

Donc $P(M) = U^* P(\exp(D)) U = U^* D U = N$ $\qquad P(M^{-1}) = -N$.

Mais $M \in G$ donc $MJ = JM^{-1}$. Donc $Q(M) J = J Q(M^{-1})$, $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$.

$Q = P \rightsquigarrow NJ = -JN$. Donc $N \in \mathfrak{g}$.

$\boxed{\text{* Comme } \mathfrak{g} \cap \mathbb{H}_n \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev, il est isomorphe (donc homéomorphe en dim finie) à } \mathbb{R}^d.}$