Ref : Un max de maths

Zavidovique

DEV

Partie génératrice minimale d'un p-groupe

Pré-requis : sous-groupe de Frattini, sous-groupe d'indice p plus petit divi.prem. de $|G|$ est distingué.

Énoncé : Soit G un p-groupe. Alors les parties génératrices minimales de G ont toutes le même cardinal.

Dém * **Lemme** : Tout sous-groupe maximal d'un p-groupe G est d'indice p.

Dém On raisonne par récurrence sur $|G|$. Si $|G| = p$, évident. Supposons vrai pour les p-groupes de cardinal $\leq p^{k-1}$ et soit G de cardinal p^k. Soit H sg. maximal de G.

(NB : $Z(G)$ n'est pas trivial)

- Si $H' := Z(G) \cap H \neq \{e\}$, alors $H' \triangleleft G$, $\triangleleft H$ (inclus dans le centre). Soit $\pi : G \to G/_{H'}$. $\pi(H)$ est alors maximal dans $G/_{H'}$. En effet, si $\pi(H) \subset K$ alors $H \subset \pi^{-1}(K)$ donc $\pi^{-1}(K) = H$ ou G ie $K = \pi(H)$ ou $G/_{H'}$. Alors, par hypothèse de récurrence, $[\pi(G) : \pi(H)] = p$. Puisque $\pi(H) = H/_{H'}$, on a $\pi(G)/_{\pi(H)} = (G/_{H'})/_{(H/_{H'})} \simeq G/_{H}$, on a $[G : H] = p$.

- Si $Z(G) \cap H = \{e\}$, soit $c \in Z(G) \setminus \{e\}$. L'ordre de c est p^l où $l \in [\![1, k]\!]$. Soit $c' := c^{p^{l-1}}$. C'est un élément d'ordre p qui n'est pas dans H. Soit H'' le sous-groupe engendré par c' et H. Il est de cardinal $p \cdot |H|$ (on voit que $H'' = \{ c'^a h \mid a \in [\![0, p-1]\!], h \in H \}$ car $c' \in Z(G)$) et il contient H strictement. Ainsi $H'' = G$ et donc $[G : H] = p$.

$\boxtimes$

* Ainsi, les sous-groupes maximaux de G sont tous distingués (lemme + pré-requis) et $F(G)$ aussi par intersection.

Frattini

- Soit $g \in G$, H un s.g. maximal. Comme $G/_H \simeq \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$, la classe de g^p dans $G/_H$ est celle du neutre donc $g^p \in H$. Vrai $\forall H \Rightarrow g^p \in F(G)$.

- Soit H un s.g. max. Comme $G/_H \simeq \mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$ est commutatif, on a $D(G) \subset H$. Vrai $\forall H \Rightarrow D(G) \subset F(G)$ et donc $G/_{F(G)}$ est abélien.

Ceci prouve que $G/_{F(G)}$ est muni d'une structure de $\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}$-espace vectoriel.

* Soit $n := \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} ({}^{G}/_{F(G)})$. Soit $(g_1, \dots, g_s)$ générateurs de G. Les projetés $(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_s})$ dans ${}^{G}/_{F(G)}$ engendrent ${}^{G}/_{F(G)}$ donc $s \geq n$. Maintenant, extrayons une base $(\overline{g}'_1, \dots, \overline{g}'_n)$. On complète la famille correspondante $(g'_1, \dots, g'_n)$ de G en $(g'_1, \dots, g'_n, a_1, \dots, a_l)$ génératrice de G, où les a_j sont dans $F(G)$. → car $(\overline{g}'_1, \dots, \overline{g}'_n)$ engendre le quotient ${}^{G}/_{F(G)}$!

Mais puisque les a_j sont mous, $(g'_1, \dots, g'_n)$ est en fait déjà génératrice ! Toute famille génératrice minimale est de cardinal n. ▨

Rq : Résultat faux si G n'est pas un p-groupe.

Ex : σ_m, on a $((12), (12 \dots m))$ et $((i\ i{+}1))_{1 \leq i \leq m-1}$. Minimales mais cardinal différent pour $m \geq 4$.

NB : * Soit G un groupe de cardinal m et p le plus petit diviseur premier de m. Tout sous-groupe de G d'indice p est distingué.

$\mathcal{D}$/ Soit H d'indice p. G agit sur ${}^{G}/_{H}$ par translations : $\rho : G \longrightarrow \sigma({}^{G}/_{H}) \simeq \sigma_p$.

$\mathrm{Im}(\rho)$ est un sous-groupe de σ_p : son cardinal divise $p!$. De plus, on a $m = |\mathrm{Im}\,\rho| \cdot |\mathrm{Ker}\,\rho|$: les facteurs premiers de $|\mathrm{Im}\,\rho|$ sont inclus dans ceux de m. Puisque p est le plus petit, on a nécessairement $|\mathrm{Im}\,\rho| = p$.

De plus, on a $H \subset \mathrm{Ker}\,\rho$ clairement. Comme $|\mathrm{Ker}\,\varphi| = \frac{m}{p} = |H|$, on a l'égalité $H = \mathrm{Ker}\,\rho$. Donc $H \triangleleft G$. ▨

* $F(G) := \bigcap_{H \text{ s-g max}} H$ est l'ensemble des éléments « mous », ie $g \in F(G)$ ssi $\forall (g, g_1, \dots, g_k)$ générateurs, la famille $(g_1, \dots, g_k)$ est encore génératrice. (vrai $\forall G$ groupe)

OK : il n'y a qu'un nombre fini de s-g de G. Donc ça marche sans l'axiome du choix.

$\mathcal{D}$/ • Soit F l'ensemble des éléments mous. Soit $g \in F(G)$ et $(g, g_1, \dots, g_k)$ génératrice.

Soit $H = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$. Si H était propre, il serait inclus dans un sous-groupe maximal H'.

Mais alors $g \in H'$ et donc H' contient la famille génératrice $g, g_1, \dots, g_k$: absurde.

- Réciproquement, soit $g \in F$ et H un sg maximal. Par l'absurde, $g \notin H$.

Soit $(g_1, \dots, g_k)$ générant H, soit $H' = \langle g, g_1, \dots, g_k \rangle$. Comme H' contient strictement H, on a $H' = G$. Comme g est nou, $\langle g_1, \dots, g_k \rangle = G$. Donc $H = G$: absurde ! ▨

* Le sous-groupe de Frattini est distingué même si G n'est pas un p-groupe.

Dém. Soit $g \in F(G)$, $h \in G$. Soit $(hgh^{-1}, g_1, \dots, g_k)$ une famille génératrice de G.

Alors $(g, h^{-1}g_1h, \dots, h^{-1}g_kh)$ génère aussi G (car $h^{-1}Gh = G$).

Donc $(h^{-1}g_1h, \dots, h^{-1}g_kh)$ génère G, et donc $(g_1, \dots, g_k)$ aussi.

Ainsi, hgh^{-1} est nou ie $\in F(G)$. ▨

* $F(\mathfrak{S}_n) = \{id\}$.

Dém. Soit $k \in [\![1, n]\!]$ et $S_k = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(k) = k\}$. C'est un s.g. de $\mathfrak{S}_n$. Montrons qu'il est maximal.

Supposons $S_k \subsetneq H$ où H sg de $\mathfrak{S}_n$. Soit $\sigma \in H$ tel que $\sigma(k) \neq k$. Pour tous $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i, j \neq k$, $(i\,j) \in H$.

On a donc $\sigma^{-1}(i\,j)\sigma = (\sigma^{-1}(i)\;\sigma^{-1}(j)) \in H$.

En particulier avec $j = \sigma(k)$, on a $(\sigma^{-1}(i)\;k) \in H$, $\forall i \neq k$.

De même avec $j = k$, on a $(\sigma^{-1}(i)\;\sigma^{-1}(k)) \in H$, $\forall i \neq k$. Comme $k \neq \sigma^{-1}(k)$, pour un tel i on a $\sigma^{-1}(i) = k$. Donc en fait, $(\sigma^{-1}(i)\;k) \in H$, $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

H contient donc toutes les transpositions : $H = \mathfrak{S}_n$. S_k est donc maximal.

On en déduit que $F(\mathfrak{S}_n) \subset \bigcap_{k=1}^{n} S_k = \{id\}$. ▨