Réf : Topologie, Queffélec

DEV

Une caractérisation abstraite des espaces métriques compacts (théorème de Bing/Niemytzki-Tychonoff)

Énoncé : Soit (X,d) un espace métrique. Il est compact si et seulement si (X,d') est complet pour toute métrique d' topologiquement équivalente à d.

↳ ie, tq $id : (X,d) \to (X,d')$ est un homéomorphisme

D/ $\Rightarrow$ Clair : « être compact » est une notion topologique, et est donc préservée lorsque l'on passe à d'. Or, tout espace métrique compact est complet.

$\Leftarrow$ * **Lemme :** Soit (X,d) un espace métrique. Alors $d' := \frac{d}{1+d}$ est une distance équivalente topologiquement à d (et satisfait $d' \leq 1$).

D/ L'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ vérifie $f(0)=0$, $f(x)>0$ si $x>0$, est croissante et sous-additive.

En effet, $f'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \left(\frac{1}{1+x}\right)^2 > 0$, et $f(x+y) = \frac{x}{1+x+y} + \frac{y}{1+x+y} \leq \frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} = f(x)+f(y)$.

Ainsi, $d' = f\circ d$ est une distance ($f(d(x,z)) \underset{\text{croît}}{\leq} f(d(x,y)+d(y,z)) \leq f(d(x,y)) + f(d(y,z))$).

De plus, $d' \leq d$ donc $i : (X,d) \to (X,d')$ est (uniformément) continue.

Par ailleurs, $d = \frac{d'}{1-d'}$ donc pour tout $\varepsilon>0$, si $d'(x,y) \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$, on a $d(x,y) \leq \varepsilon$.

Ainsi i^{-1} est aussi (uniformément) continue. ☒

* Montrons la contraposée : supposons que (X,d) n'est pas compact.
Quitte à remplacer d par $\frac{d}{1+d}$, on peut supposer que $d \leq 1$. Cela ne change pas la non-compacité de (X,d). Il existe donc $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ sans valeur d'adhérence.

- Soit $B_n := \{ f : X \to \mathbb{R} \mid |f(u)-f(v)| \leq \frac{1}{n} d(u,v),\ \forall u,v \in X \text{ et } f(x_j)=0,\ \forall j>n \}$

pour $n \geq 1$, et $B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$. On définit $d'(x,y) := \sup_{f\in B} |f(x)-f(y)|$ pour $x,y \in X$.
d' est clairement symétrique et vérifie l'inégalité triangulaire.
Par construction, nous savons que $d' \leq d$.
Par ailleurs, soit $a \in X$ et $\varepsilon>0$. Comme a n'est pas valeur d'adhérence de (x_n), il existe $0<\delta<\varepsilon$ et n_0 tels que $\forall n > n_0$, $d(x_n, a) \geq \delta$.

Posons $f(x) = \frac{1}{n_0}\left(\delta - d(x,a)\right)^+$. Comme $\forall s,t \in \mathbb{R},\ s<t \Rightarrow t^+ - s^+ \leq t-s$,

on a $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{n_0} d(x,y)$. De plus, $n > n_0 \Rightarrow f(x_n) = 0$ car $\delta - d(x_n,a) \leq 0$.

Ainsi, $f \in B_{n_0} \subset B$.

Supposons que $d'(x,a) < \frac{\delta}{n_0}$. Alors $\frac{1}{n_0}\left|\delta - (\delta - d(x,a))^+\right| = |f(x) - f(a)| \underset{\text{def de } d'}{\leq} d'(x,a) < \frac{\delta}{n_0}$.

On doit donc avoir $\delta \geq d(x,a)$ (sinon $\frac{\delta}{n_0} < \frac{\delta}{n_0}$!), et donc $d(x,a) \leq \varepsilon$.

Ceci prouve d'une part que d' est bien une distance ($d'(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$)

et que $i : (X,d') \to (X,d)$ est continue. Comme $d' \leq d$, i^{-1} l'est aussi. Ainsi,

d et d' sont topologiquement équivalentes.

· Par ailleurs, (x_n) est de Cauchy pour d'. En effet, soit $\varepsilon > 0$, N entier tel que $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$, $p,q \geq N$ et $f \in B$.

→ Si $f \in B_n$ avec $n \geq N$, alors $|f(x_p) - f(x_q)| \leq \frac{1}{n} d(x_p,x_q) \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq \varepsilon$.

→ Si $f \in B_n$ avec $n < N$, alors $f(x_p) = f(x_q) = 0$.

Ainsi, on a toujours $|f(x_p) - f(x_q)| \leq \varepsilon$, $\forall f \in B$. Donc $d'(x_p,x_q) \leq \varepsilon$: (x_n) est de Cauchy pour d'.

Mais (x_n) n'a pas de valeur d'adhérence, donc a fortiori ne converge pas (ni pour d, ni pour d'). Ainsi, (X,d') n'est pas complet.

$\boxtimes$