Réf : Topologie, Queffélec

Dev

Lemme de Zabrejko, théorèmes de Banach-Steinhaus, de l'application ouverte, du graphe fermé

Énoncé : (lemme de Zabrejko)

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un Banach et $p : X \to \mathbb{R}^+$ une semi-norme telle que $\forall (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ converge $\Rightarrow p\left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} p(x_n) \leqslant +\infty$. (condition $(*)$). Alors p est continue ; il existe $M < +\infty$ tel que $p(x) \leqslant M \cdot \|x\|$, $\forall x \in X$.

D/ ***Lemme :** Soit $A \subset X$ tel que $BF(0,1) \subset \overline{A}$. Alors tout $x \in BF(0,1)$ s'écrit $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$ où $x_n \in A$.

D/ On construit par récurrence les $x_n \in A$ tels que

$$\left\| x - x_0 - \frac{x_1}{2} - \dots - \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}} \right\| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Le point x_0 existe par hypothèse (définition de $\overline{A}$). Supposons $x_0, \dots, x_{n-1}$ construits. Alors $\left\| 2^n \left(x - x_0 - \dots - \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}}\right)\right\| \leqslant 1$ donc c'est un élément de $BF(0,1)$. Ainsi, il existe $x_n \in A$ tel que $\left\| 2^n \left(x - x_0 - \dots - \frac{x_{n-1}}{2^{n-1}}\right) - x_n \right\| \leqslant \frac{1}{2}$, et donc $\left\| x - x_0 - \dots - \frac{x_n}{2^n} \right\| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

On obtient ainsi $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$. ◇

* Pour $t \in \mathbb{R}_+$, $E_t := \{x \in X \mid p(x) \leqslant t\}$. On a clairement $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{E_n}$ donc le théorème de Baire nous assure que l'un des $\overline{E_j}$ est d'intérieur non vide. Fixons un tel $j \in \mathbb{N}^*$. Il existe $x_0 \in X$ et $r > 0$ tels que $BF(x_0, r) = x_0 + r\,BF(0,1) \subset \overline{E_j}$. Posons $F := \frac{E_j - x_0}{r}$.

On a alors $BF(0,1) \subset \overline{\frac{E_j - x_0}{r}} = \overline{F}$. De plus, si $x \in F$, on peut écrire $x = \frac{y - x_0}{r}$ où $y \in E_j$.

Mais alors $p(x) = \frac{1}{r} p(y - x_0) \leqslant \frac{1}{r}\left(p(y) + p(-x_0)\right) \leqslant \frac{1}{r}\left(j + p(-x_0)\right)$. Donc $F \subset E_t$ où $t = \frac{1}{r}(j + p(-x_0))$. On voit donc que $BF(0,1) \subset \overline{E_t}$.

Soit $x \in BF(0,1)$. Par le lemme, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x_n}{2^n}$ où $x_n \in E_t$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors $p(x) \overset{(*)}{\leqslant} \sum_{n=0}^{+\infty} p\left(\frac{x_n}{2^n}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{p(x_n)}{2^n} \leqslant t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2t$. Posons $M := 2t$.

Si $x \in X$, $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in BF(0,1)$ et donc $p\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leqslant M$ soit $p(x) \leqslant M\|x\|$, ce qu'on voulait. ▨

Corollaire 1 : (Banach-Steinhaus)

Soit $(T_i)_{i\in I}$ des applications linéaires continues de X Banach dans Y normé. On suppose que pour tout $x \in X$, $\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < +\infty$. Alors $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$. (Il y a donc équivalence)

D/ Pour $x \in X$, on pose $p(x) := \sup_{i\in I} \|T_i(x)\|$: c'est une semi-norme. Elle vérifie la condition $(*)$. En effet, soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une série convergente et s sa somme. Pour $i \in I$ fixé, $T_i(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} T_i(x_n)$ car T_i est continue. D'où $\|T_i(s)\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|T_i(x_n)\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p(x_n)$.

On passe au sup : $p(s) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p(x_n)$, ce qu'on voulait. Par Zabrejsko, il existe $M > 0$ tel que $p(x) \leq M\|x\|$, $\forall x \in X$. Mais alors $\forall i \in I$, $\forall x \in X$, $\|T_i(x)\| \leq M \cdot \|x\|$ donc $\|T_i\| \leq M$.

Ainsi $\sup_{i\in I} \|T_i\| \leq M < +\infty$. ☒

Corollaire 2 : (Application ouverte)

Soient X, Y deux Banach et $T : X \to Y$ linéaire, continue surjective. Alors il existe $C > 0$ tel que $\forall y \in Y$, $\exists x \in X \mid T(x) = y$ et $\|x\| \leq C\|y\|$. En particulier, T est ouverte.

D/ • Pour $y \in Y$, on définit $p(y) := \inf\{\|x\| \mid T(x) = y\}$ (c'est une semi-norme). Soit $(y_n) \in Y^{\mathbb{N}}$ une série convergente et y sa somme. Fixons $\varepsilon > 0$. Pour chaque $n \geq 0$, soit $x_n \in X$ tel que $T(x_n) = y_n$ et $\|x_n\| \leq p(y_n) + \varepsilon 2^{-n}$ (définition de p). Nous pouvons supposer que $\sum_{n=0}^{+\infty} p(y_n) < +\infty$, sinon il n'y a rien à vérifier. Alors la série $\sum x_n$ est absolument convergente dans X Banach donc convergente. Soit x sa somme. On a $\|x\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p(y_n) + 2\varepsilon$. De plus, T étant continue, $T(x) = \sum T(x_n) = \sum y_n = y$. Donc $p(y) \leq \|x\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} p(y_n) + 2\varepsilon$. Ceci étant vrai quelque soit $\varepsilon > 0$, p vérifie la condition $(*)$. Par Zabrejsko, $p(y) \leq M\|y\|$, où $M > 0$ et pour tout $y \in Y$. Fixons $y \in Y$. Soit $x \in X$ tel que $T(x) = y$ et $\|x\| - p(y) \leq M\|y\|$ (existe par définition de p). Alors $\|x\| \leq 2M\|y\|$. La constante recherchée est $C := 2M$.

• T est alors ouverte : soit $\mathcal{U}$ un ouvert de X et $y \in T(\mathcal{U})$. $y = T(x)$ où $x \in \mathcal{U}$. Soit $r > 0$ tel que $x + B_X(0,r) \subset \mathcal{U}$. Alors $y + T(B_X(0,r)) \subset T(\mathcal{U})$. Or, si $y \in B_Y(0, \frac{r}{C})$, on peut trouver $x \in X$ tel que $T(x) = y$ et $\|x\| \leq C\|y\| < r$, ie $x \in B_X(0,r)$. Donc $B_Y(0, \frac{r}{C}) \subset T(B_X(0,r))$. Ainsi $y + B_Y(0, \frac{r}{C}) \subset T(\mathcal{U})$: $T(\mathcal{U})$ contient un voisinage de tous ses points, donc est ouvert. ☒

Corollaire 3 : (graphe fermé)

Soient X, Y deux Banach et $T : X \to Y$ linéaire, de graphe $G \subset X \times Y$. On suppose que G est fermé dans $X \times Y$. Alors T est continue. (c'est donc une équivalence)

D] $\forall x \in X$, $p(x) := \|T(x)\|$. C'est une semi-norme sur X car T est linéaire. Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ une série convergente et soit s sa somme. On peut supposer que $\sum_{n=0}^{\infty} p(x_n) < +\infty$.

Alors la série de terme général $T(x_n)$ converge absolument dans Y Banach donc converge.

Soit y sa somme. $\|y\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|T(x_n)\| = \sum_{n=0}^{+\infty} p(x_n)$. Soit $s_n := \sum_{j=0}^{n} x_j$.

On a $s_n \longrightarrow s$ et $T(s_n) = \sum_{j=0}^{n} T(x_j) \longrightarrow y$. Puisque G est fermé, $(s, y) \in G$, c'est à dire $T(s) = y$. Ainsi $p(s) = \|T(s)\| = \|y\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} p(x_n)$. p vérifie la condition $(*)$. Zabrejsko.

$\blacksquare$

Applications : $*$ Soient E, F Banach et $T : E \xrightarrow{\sim} F$ iso. continu. Alors T^{-1} est continu.

$*$ E Banach pour $\|\cdot\|_1$ et pour $\|\cdot\|_2$. Alors $\|\cdot\|_1$ domine $\|\cdot\|_2$ ssi $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

↳ Appliquer à $id : (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$

↳ cela fournit une autre preuve du graphe fermé. Sur E, pour $T : E \to F$ linéaire avec E, F Banach, poser $\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ $\quad \|x\|_2 = \|x\|_E$.

$(E, \|\cdot\|_1)$ est un Banach car le graphe de T est fermé