Ref : Ouvrand, Probabilités 2
Exo 9.7

DEV

Une caractérisation des lois exponentielles

Énoncé : Soient X, Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de même loi μ, admettant une densité f telle que $f(x) > 0$ ssi $x \geq 0$. On pose $U := \min(X,Y)$ et $W = |X-Y|$. Alors U et V sont à densité. Par ailleurs, si f est continue sur $\mathbb{R}_+$, alors U et W sont indépendantes ssi μ est une loi exponentielle.

D/ * **U et W sont à densité :** Pour $g \in \mathcal{E}_c^+(\mathbb{R}^2)$ (continue, positive, support compact), comme X et Y sont indépendantes, le théorème de transfert donne

$$\mathbb{E}[g(U,W)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x \wedge y, |x-y|) f_X(x) f_Y(y)\, d\lambda_2(x,y)$$

(f_X, f_Y : densités de X et de Y.
λ_2 : mesure de Lebesgue
$x \wedge y$: $\min(x,y)$)

$$= \int_{x \leq y} g(x, y-x) f_X(x) f_Y(y)\, d\lambda_2(x,y) + \int_{x > y} g(y, x-y) f_X(x) f_Y(y)\, d\lambda_2(x,y).$$

$\phi(x,y) = (y,x)$, changement de variables

Puisque $f_X = f_Y = f$ et comme $\lambda_2\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\} = 0$, en intervertissant les variables on a $\mathbb{E}[g(U,W)] = 2 \int_{x \leq y} g(x, y-x) f(x) f(y)\, d\lambda_2(x,y)$.

On effectue le changement de variables $\begin{cases} u = x \\ w = y-x \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = u+w \end{cases}$ de jacobien 1.

$$\mathbb{E}[g(U,W)] = 2 \int_{0 \leq w} g(u,w) f(u) f(u+w)\, d\lambda_2(u,w).$$

Donc (U,W) admet la densité $f_{(U,W)} : (u,w) \mapsto 2\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(w) f(u) f(u+w)$.

Les variables aléatoires marginales U et W admettent donc les densités

$$\boxed{\begin{aligned} f_U(u) &= 2 f(u) \int_{\mathbb{R}_+} f(u+w)\, d\lambda(w) \\ f_W(w) &= 2\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(w) \int_{\mathbb{R}} f(u) f(u+w)\, d\lambda(u). \end{aligned}}$$

* **Si μ est exponentielle alors U et W sont indépendantes :**

Ici, $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\, p e^{-px}$ où $p > 0$. Vérifions que $f_{(U,W)} = f_U \cdot f_W$.

- $f_{(U,W)}(u,w) = 2\, \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(w)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u+w)}_{= \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(w)} p^2 e^{-p(2u+w)}$

$$\bullet\ f_U(u) = 2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)\, p^2 e^{-pu} \underbrace{\int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u+w)\, e^{-p(u+w)}\, dw}_{= \int_{\max(-u,0)}^{+\infty} e^{-p(u+w)} dw \,=\, \frac{1}{p} e^{-p\max(-u,0)} e^{-pu}} = 2p\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)\, e^{-2pu}.$$

Or $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u) e^{-p\max(-u,0)} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$.

$$\bullet\ f_W(w) = 2\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(w)\, p^2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u+w)\, e^{-p(2u+w)}\, du}_{= \int_{\max(-w,0)}^{+\infty} e^{-p(2u+w)} du \,=\, \frac{1}{2p} e^{-p\max(-w,0)} e^{-pw}} = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(w)\, p\, e^{-pw}.$$

Donc ça marche.

$\ast$ Si f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et U, W sont indépendantes alors μ est exponentielle :

Pour λ_2-presque tout $(u,w) \in \mathbb{R}^2$, on a $f_{(U,W)}(u,w) = f_U(u) f_W(w)$; c'est-à-dire :

$$\forall (u,w) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+,\ f(u)f(u+w) = 2\left(f(u)\int_{\mathbb{R}_+} f(u+\alpha)\, d\lambda(\alpha)\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f(\alpha)f(\alpha+w)\, d\lambda(\alpha)\right)$$

On pose $G(u) = \int_{[u,+\infty[} f(\alpha)\, d\lambda(\alpha)$, $\forall u \in \mathbb{R}_+$. G est continue. Pour λ_2-presque tout $(u,w) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $f(u+w) = G(u) f_W(w)$.

Pour λ-presque tout $w \in \mathbb{R}_+$, $G(w) = \int_{[w,+\infty[} f(\alpha)\, d\lambda(\alpha) = \int_{\mathbb{R}_+} f(u+w)\, d\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}_+} G(u) f_W(w)\, d\lambda(u)$.

Donc $G(w) = m f_W(w)$ où $m = \int_{\mathbb{R}_+} G(u)\, d\lambda(u)$.

Puisque le support de f_W est inclus dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $m \in \mathbb{R}_+^*$: G est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, d'intégrale non nulle. Pour λ_2-presque tout $(u,w) \in \mathbb{R}_+^2$, on a $f(u+w) = \frac{G(u)G(w)}{m}$.

On pour tout $u \in \mathbb{R}_+$ et tout $v \in \mathbb{R}_+$, $G(u+v) = \int_{[u+v,+\infty[} f(w)\, d\lambda(w) = \int_{[v,+\infty[} f(u+w)\, d\lambda(w)$.

et donc, pour λ-presque tout $u \in \mathbb{R}_+$ et tout $v \in \mathbb{R}_+$, $G(u+v) = \int_{[v,+\infty[} \frac{G(u)G(w)}{m}\, d\lambda(w) = \frac{G(u)}{m}\int_{[v,+\infty[} G(w)\, d\lambda(w)$.

Par continuité de G, cette identité est vraie pour tout $u, v \in \mathbb{R}_+$.

Puisque $G(0) = 1$, on a $G(v) = \frac{1}{m}\int_{[v,+\infty[} G(w)\, d\lambda(w)$. G (qui est dérivable, avec $G' = -f$)

vérifie donc $G'(v) = -\frac{G(v)}{m}$. Ainsi, $G(v) = \exp\left(-\frac{v}{m}\right)$, $\forall v \in \mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{C'est à dire } f(u) = -G'(u) = \frac{1}{m}\exp\left(-\frac{u}{m}\right),\ \forall u \in \mathbb{R}_+.\\ \text{Ainsi, } \mu \text{ est une loi exponentielle.}\end{array}}$$