Formule des compléments

Théorème 1. $\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}}$ *(pour* $0<x<1$*)*

1 Démonstration

Démonstration. On part du produit eulérien (voir ci-dessous « Formule du sinus cardinal »)

$$\frac{\sin(\pi z)}{\pi z}=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{z^2}{k^2}\right)=\lim_n\frac{\prod_{k=1}^{n}(k-z)(k+z)}{(n!)^2}=\lim_n\frac{(1-z)...(n-z)\times(1+z)...(n+z)}{(n!)^2},$$

que l'on compare à la formule de Gauss (prendre la version « $x+k$ ») :

$$\boxed{\Gamma(x)=\frac{1}{x}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n^x}{\binom{x+n}{n}},}$$

qu'on peut aussi écrire :

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma(x) &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,n^x}{x^{n+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{2}{x}\right)...\left(1+\frac{n}{x}\right)}\ \text{version « } k/x \text{ »}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n!\,n^x}{x(x+1)(x+2)...(x+n)}\ \text{version « } x+k \text{ »}\\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^x}{x(1+x)\left(1+\frac{x}{2}\right)...\left(1+\frac{x}{n}\right)}\ \text{version « } x/k \text{ ».}\end{aligned}}$$

□

Applications

1) Ceci permet de calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ et donc, par un changement de variable, d'avoir l'intégrale de Gauss :

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2) De plus, par récurrence :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-1-\frac{1}{2}\right)\times...\times\frac{1}{2}=\frac{(2n)!}{4^n\times n!}\sqrt{\pi}.$$

2 Formule du sinus cardinal : $\dfrac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{z^2}{(k\,\pi)^2}\right)$

Esquisse d'une démonstration par tatônnements

On a $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}$ et $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \lim\limits_n \left(1 + \dfrac{\mathrm{i}\,z}{n}\right)^n$ d'où $\sin z = \lim\limits_n \left(\dfrac{\left(1+\dfrac{\mathrm{i}\,z}{n}\right)^n - \left(1-\dfrac{\mathrm{i}\,z}{n}\right)^n}{2\mathrm{i}}\right)$.

On pose $\boxed{P_n(z) = \left(1+\dfrac{\mathrm{i}\,z}{n}\right)^n - \left(1-\dfrac{\mathrm{i}\,z}{n}\right)^n}$, on a alors $P_n(z) = 0 \Leftrightarrow z = n\tan\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)$, et ainsi

$P_n(z) = K_n \prod_{k=0}^{n-1}\left(z - n\tan\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)\right) = K_n \cdot z \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(z - n\tan\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)\right)$, qu'on peut écrire aussi

$P_n(z) = L_n \cdot z \cdot \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \dfrac{z}{n\tan\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)}\right)$ et $\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \dfrac{z}{n\tan\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)}\right)$ convergerait vers $\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \dfrac{z}{k\,\pi}\right)$ si on avait la condition suffisante que $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n\tan\left(\dfrac{k\,\pi}{n}\right)}$ converge normalement avec n mais l'inégalité $x \geqslant 0 \Rightarrow \tan x \geqslant x$ donnerait comme condition suffisante $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{k\,\pi} < \infty$ qui est fausse par Riemann.

Alors on prend plutôt $\sin z = \lim\limits_n P_{2n+1}(z)$ et :

$$\begin{aligned} P_{2n+1}(z) &= L_n \cdot z \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{(2n+1)\tan\left(\dfrac{k\,\pi}{2n+1}\right)}\right)\left(1 + \frac{z}{(2n+1)\tan\left(\dfrac{k\,\pi}{2n+1}\right)}\right) \\ &= L_n \cdot z \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\dfrac{k\,\pi}{2n+1}\right)}\right). \end{aligned}$$

À partir de là :

- $L_n = P'_{2n+1}(0) = 2\mathrm{i}$
- on a :

$$\sin z = z \cdot \lim_n \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\dfrac{k\,\pi}{2n+1}\right)}\right).$$

- Tout est bien défini car $\frac{k}{2n+1}$ n'est jamais un entier
- Pour passer à la limite en n dans la parenthèse il suffit d'avoir $\sum_{k=1}^{+\infty} \dfrac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\dfrac{k\,\pi}{2n+1}\right)}$ converge normalement, or l'inégalité $x \geqslant 0 \Rightarrow \tan x \geqslant x$ donne cette fois-ci :

$$\frac{z^2}{(2n+1)^2\tan^2\left(\dfrac{k\,\pi}{2n+1}\right)} \leqslant \frac{z^2}{(k\,\pi)^2},$$

terme général d'une série convergente.

- Conclusion :

$$\sin z = z \cdot \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(k\,\pi)^2}\right),$$

qu'on peut écrire aussi :

$$\boxed{\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{(k\,\pi)^2}\right)},$$

ou encore :

$$\boxed{\frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2}\right)}.$$