Dev

Ref : Briane - Pagès
Analyse, théorie de l'intégration

# L'escalier de Cantor

**Énoncé :** Il existe une fonction $f$ continue croissante sur $[0,1]$ telle que $f(0)=0$, $f(1)=1$ et dérivable $\lambda$-presque partout, de dérivée nulle.

↳ En outre, $\int_0^1 f' = 0 < f(1)-f(0) = 1$ !

**Lemme :** (Ensemble de Cantor)

On définit $A_1 := [0,\frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3},1]$ et $A_{n+1} := \frac{A_n}{3} \cup \frac{2+A_n}{3}$, $n \geq 1$.

Chaque $A_n$ est la réunion disjointe de $2^n$ intervalles fermés de longueur $3^{-n}$, d'extrémités les $2^{n+1}$ points " $\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3^k} + \frac{\varepsilon_n}{3^n}$ " où $(x_k) \in \{0,2\}^n$, $\varepsilon_n \in \{0,1\}$.

On a $A_{n+1} \subset A_n$ et $\partial A_n \subset \partial A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

L'ensemble $K := \bigcap_{n \geq 1} A_n$ de Cantor est fermé de mesure nulle.

Preuve : voir complément.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$$f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$$
$$x \longmapsto \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt$$

On a $f_n(0)=0$ et $f_n(1) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \lambda(A_n) = 1$. De plus, $f_n$ est continue et croissante sur $[0,1]$.

- Soit $I$ l'un des $2^n$ intervalles compacts de $A_n$. On a $\lambda(I) = 3^{-n}$ et $\lambda(I \cap A_{n+1}) = \frac{2}{3}\lambda(I)$. Ainsi

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt = \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt = 2^{-n}.$$

Par ailleurs, $f_n$ est constante sur chacun des $2^n-1$ intervalles ouverts composant ${}^cA_n$.

De même pour $f_{n+1}$ car ${}^cA_n \subset {}^cA_{n+1}$.

↳ Si $x \in {}^cA_n$, soit $z = \max(A_n \cap [0,x])$.
C'est la borne sup du segment $I \subset A_n$ le plus proche à gauche de $x$, de sorte que $]z,x] \subset {}^cA_n$.
Alors $f_n(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^x \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt = \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_0^z \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt = f_n(z)$.

- L'égalité précédente entraîne alors :

$$\underline{\forall x \in {}^cA_n,\ f_n(x)} = \sum_{I \subset A_n \cap [0,x]} \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt = \sum_{I \subset A_n \cap [0,x]} \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt = \underline{f_{n+1}(x)}.$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{A_n \cap [0,x]} \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{A_{n+1} \cap [0,x]} \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt + \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_{(A_n \setminus A_{n+1}) \cap [0,x]} \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt$$

$$= f_{n+1}(x) + 0.$$

Où $I$ est l'un des $2^n$ intervalles compacts qui composent $A_n$.

Ainsi, pour un tel $I$, $f_{n+1}(\min I) = f_n(\min I)$ par continuité (à gauche). Donc :

$$\underline{\forall x \in I,\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)|} \leq |f_{n+1}(x) - f_{n+1}(\min I)| + |f_n(x) - f_n(\min I)|$$

$$\leq \left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} \int_I \mathbb{1}_{A_{n+1}}(t)\,dt + \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_I \mathbb{1}_{A_n}(t)\,dt \underline{= 2^{-n+1}}$$

Donc $\underline{\forall x \in [0,1],\ |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n+1}}$. Soient alors $p < q \in \mathbb{N}^*$.

Nous avons $|f_q(x) - f_p(x)| \leq \sum_{k=p}^{q-1} |f_{k+1}(x) - f_k(x)| \leq \sum_{k=p}^{q-1} 2^{-k+1} \leq \sum_{k=p}^{\infty} 2^{-k+1} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

Ainsi, la suite $\underline{(f_n) \text{ est de Cauchy}}$ dans le Banach $(\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Elle converge vers une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$, nécessairement continue et croissante.

- Sur chacun des intervalles ouverts dont ${}^cA_n$ est la réunion, $f_{n+1} = f_n$ pour $m \geq n$ puisque ${}^cA_n \subset {}^cA_m$. Ainsi, $f = f_n$ sur ${}^cA_n$. Puisque $f_n$ y est constante, $f$ y est également, donc dérivable et de dérivée nulle.

En conclusion, $f$ est dérivable sur $\bigcup_{n=1}^{\infty} {}^cA_n = {}^cK$ de dérivée nulle.

Comme $\lambda(K) = 0$, $\underline{f' = 0 \ \lambda\text{-presque partout.}}$ ∎

L'escalier de Cantor ou « du diable », trois premières itérations.