

Leçon 141- PGCD PPCM. Algorithmes de calcul.

I. Anneau à PGCD

1. Définitions

- Déf : Famille d'éléments admettant un PGCD
- Prop : Deux PGCD sont associés
- Prop : En cas d'existence d'un pgcd : notation du pgcd et commutativité du pgcd
- Déf : Anneau à PGCD

2. Exemple d'anneau à PGCD

- Anneau principal + déf du PGCD : $\delta = (a_1, \dots, a_k)$
- Anneau factoriel + déf du PGCD : $\delta = \prod p_i^{\min(a_i, b_i)}$
- Homogénéité du PGCD

II. Propriétés et applications

1. Divisibilité

- Déf : Elements étrangers
- Prop : $d = \text{pgcd}(d\alpha_1, \dots, d\alpha_k) \Rightarrow \text{pgcd}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = 1$
- Thm de Gauss
- **Dev 1 : Thm de Sophie Germain**

2. Lien pgcd/ppcm

- Déf : "Anneau à ppcm"
- Prop : $ab = \text{pgcd}(a, b) \cdot \text{ppcm}(a, b)$
- Thm de Bézout
- Anneau principal : Il y a un ppcm

3. Application à la réduction

- **Dev 2 : Lemme des noyau + application à la semi simplicité**

III. Algorithme de calcul

1. Dans un anneau euclidien

- Algorithme d'Euclide
- Algorithme d'Euclide étendu

2. Pour les polynômes

- Algorithme + exemple

Bibliographie :

- 1- Rombaldi : Algèbre et géométrie
- 2-Risler Boyer : Algèbre pour la L3