

Leçon 101 : Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

I. Notion de groupe opérant sur un ensemble. [2]p.195

1. Définitions

- Déf : Action à gauche : $G \times E \rightarrow E$
- Prop : Équivalence action et groupe des permutations
- Déf : Noyau d'une action

2. Les exemples classiques

- Exemple : Translation à gauche
- Déf : Action fidèle
- Thm de Cayley
- Exemple : Opération de G sur l'ensemble des classes à gauche [1] p.14
- Exemple : Opération par conjugaison
- Exemple : Automorphismes intérieurs

II. Stabilisateurs et orbites

1. Définitions [2]

- Déf : Stabilisateur : $Stab(x) := \{g \in G | g.x = x\}$
- Exemple : Action de \mathcal{S}_n sur $\{1, \dots, n\}$
- Déf : Orbite : $\omega(x) := \{g.x, g \in G\}$
- Exemples des orbites et des stabilisateurs sur les actions classiques

2. Propriétés des orbites et des stabilisateurs [2]

- Prop : $|\omega(x)| = \frac{|G|}{|Stab(x)|}$
- Prop : Formule d'équations aux classes
- Application : pour les automorphismes intérieurs
- Application : **Dev 1 : Thm de Wedderburn**[1]

III. Applications

1. p -groupes [1]

- Déf : Centre d'une p -groupe
- Prop : Tout groupe d'ordre p^2 est abélien
- Prop : $|X| \equiv |X^G| \pmod{p}$
- Déf : p -Sylow
- **Dev 2 : Thm de Sylow**

2. Action de groupes sur les espaces de matrices [3]

- Exemple : Action par similitude
- Exemple : Action par congruence

Bibliographie :

- 1- Perrin : Cours d'algèbre
- 2- Calais : Éléments de théorie des groupes
- 3-Caldero Germoni : Nouvelles histoires hédonistes tome 1