

Points de Lebesgue d'une fonction L^1

Théorème. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, alors $\int_{B_x(r)} |f(y) - f(x)| dy \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$ pour presque tout x .

Lemme. Soit K un compact recouvert par les boules $(B_{x_i}(r_i))_{i \in I}$. Alors il existe $J \subset I$ une partie finie telle que les $(B_{x_j}(r_j))_{j \in J}$ sont disjoints et les $(B_{x_j}(3r_j))_{j \in J}$ recouvrent K .

Démonstration. On l'admettra pour le développement. Dans les grandes lignes, on se ramène à I fini par compacité de K , on choisit la boule de rayon maximal et on ôte toutes les boules qui l'intersectent. On répète cela sur les boules restantes jusqu'à exhaustion. \square

Définition.

$$Mf(x, r) = \int_{B_x(r)} |f(y)| dy$$

$$Mf(x) = \sup_{r > 0} Mf(x, r)$$

$$Tf(x, r) = \int_{B_x(r)} |f(y) - f(x)| dy$$

$$Tf(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} Tf(x, r)$$

Lemme. Soit $a > 0$,

$$\text{Leb}(x \text{ tel que } Mf(x) > a) \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{a}$$

Démonstration. On note $E_a = \{x \text{ tel que } Mf(x) > a\}$. Par régularité intérieure de la mesure de Lebesgue, $\text{Leb}(E_a) = \sup \text{Leb}(K)$ pour K compact inclus dans E_a .

Pour tout $x \in K$, il existe $B(x, r_x)$ une boule telle que $Mf(x, r_x) > a$. On en extrait une sous-famille finie comme dans le lemme, qu'on note $(B_j)_{j \in J}$. On a alors :

$$\text{Leb}(K) \leq 3^n \sum_{j \in J} \text{Leb}(B_j) \leq \frac{3^n}{a} \sum_{j \in J} \int_{B_j} |f(y)| dy \leq 3^n \frac{\|f\|_1}{a}$$

La première inégalité vient du fait que les boules de rayon triple recouvrent K , la seconde de $Mf(x, r_x) > a$, et la troisième du fait que les B_j soient disjoints. \square

On peut maintenant montrer le théorème :

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \cap L^1$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.
 g est continue, donc $Tg = 0$. Notons $h = f - g$, une inégalité triangulaire donne

$$Th(x, r) \leq Mh(x, r) + |h(x)| \leq Mh(x) + |h(x)|$$

Ainsi, $Tf \leq Mh + |h|$. Soit $a > 0$, si $Tf(x) > 2a$, alors $Mh(x) > a$ ou $h(x) > a$. Ainsi, selon le lemme précédent (et une inégalité "de Markov"; $Leb(x|h(x) > a) \leq \frac{\|h\|_1}{a}$),

$$Leb(x \text{ tel que } Tf(x) > 2a) \leq \frac{3^n + 1}{a} \varepsilon$$

Et ce pour tout $\varepsilon > 0$. On en déduit que $Tf = 0$ presque partout. □

Remarque. On peut adapter la preuve pour le résultat avec $f \in L^1_{loc}$.

Corollaire. Soit A un borélien, alors $F_r(x) = \frac{Leb(A \cap B_x(r))}{Leb(B_x(r))}$ converge presque partout vers 1_A .

Démonstration. Soit $f = 1_A$, on a :

$$|F_r(x) - f(x)| \leq Tf(x, r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{p.p.} 0$$

□

Corollaire. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, alors $g(x) = \int_0^x f$ est dérivable presque partout et $g' = f$.

Démonstration. g est bien définie car $f \in L^1_{loc}$. De plus, selon le théorème, pour presque tout x , $\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(y) - f(x)| dy \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{p.p.} 0$.

Donc, pour presque tout x , $\frac{g(x+r) - g(x)}{r} \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{p.p.} f(x)$ et $\frac{g(x-r) - g(x)}{-r} \xrightarrow[r \rightarrow 0^+]{p.p.} f(x)$; g y est donc dérivable et $g'(x) = f(x)$. □