Représentation par permutation et formule de Burnside

jojo

Août 2018

1 Introduction

Un des premiers exemples de représentations de groupes finis est le fait d'associer à une permutation de S_n une matrice de permutation dans $GL_n(\mathbb{C})$. A une permutation σ de S_n on associe une matrice

$$[P_\sigma]_{i,j} := \delta_{i,\sigma(j)} \ \forall 1 \leq i,j \leq n \tag{1}$$

Or chaque fois qu'un groupe fini G agit sur un ensemble fini X, on obtient une injection de G dans le groupe des permutations de X. Il est donc naturel de chercher à représenter un groupe G via les matrices de permutations données par l'action de G sur un ensemble.

2 Développement

Ce développement ce trouve dans [1] p.281.

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble finit X. On note $\mathbb{C}X$ l'espace vectoriel des fonctions de X dans $\mathbb{C}$, que l'on munit de la base canonique $(\delta_x)_{x\in X}$. On peut faire agir linéairement G sur $\mathbb{C}X$ par pour tout $x \in X$ et $g \in G$

$$\rho_X(g)(\delta_x) = g.\delta_x := \delta_{g.x} \tag{2}$$

On obtient ainsi une représentation de G appelée représentation par permutation.

L'élément $s := \sum_{x\in X} \delta_x$ est G-invariante. Et donc $< s >_{\mathbb{C}X}$ est une sous représentation de degré 1 isomorphe à la représentation triviale. On note V_X un supplémentaire G-stable de $\mathbb{C}s$ dans $\mathbb{C}X$, V_X est appelée "représentation par permutation modulo la triviale". On va montrer la proposition suivante

Proposition 1. (i)Le caractère χ de V_X est pour tout $g \in G$ $\chi(g) = |X^g| - 1$
(ii)$|X/G| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |X^g|$
(iii)Supposons que l'action de G sur X est transitive. Alors elle est deux fois transitive ssi V_X est irréductible.

Remarque 1. La formule de Burnside est remarquable et a d'autres applications que ce développement, par exemple des problèmes de coloriage. Noter que l'on peut obtenir cette formule sans la théorie des représentations.

Le troisième point de la proposition permet de compléter de nombreuses tables des caractères : il donne pour tous les entiers naturels n un représentations irréductibles du groupe des permutations S_n, il permet de compléter pas mal de ligne dans la table des caractères du groupe du cube... On trouve des exemples dans [1]. Chaque fois que l'on est face à une action doublement transitive on récupère une représentation dont le caractère est donné par "nombre d'invariants moins 1" : la double transitivité assure alors sans aucun calcul l'irréductibilité de cette représentation.

Démonstration. (i)Soit $g \in G$ écrivons la matrice de $\rho_X(g)$ dans la base $(\delta_x)_{x\in X}$. Le coefficient diagonale d'indice x est 1 si x est invariant et 0 sinon. Il en résulte que $tr(\rho_X(g)) = |X^g|$. Puis par additivité des caractères on a $\chi(g) = |X^g| - 1$.

(ii)Soit $(\mathbb{C}X)^G$ l'espace des invariants par G. Notons qu'un vecteurs $\sum_{x\in X}\lambda_x\delta_x$ est G stable ssi l'application $X\to\mathbb{C}$; $x\to\lambda_x$ est constante sur un orbite donné, d'où $dim(\mathbb{C}X^g)=|X/G|$.

Soit e l'endomorphisme de $\mathbb{C}X$ défini par $e=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_X(g)$. On vérifie que e est un projecteur sur $(\mathbb{C}X)^G$. Et donc comme trace et rang coïncide pour des projecteurs, on utilise aussi l'additivité de la trace pour trouver

$$|X/G| = dim(\mathbb{C}X)^G = rg(e) = tr(e) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| \text{ car } tr(\rho_X(g)) = |X^g| \tag{3}$$

(iii)On rappelle le critère suivant d'irréductibilité d'une sous-représentation

Proposition 2. Une représentation est irréductible ssi son caractère est de norme 1.

En notant χ le caractère de V_X on a

$$<\chi,\chi>=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(|X^g|-1)^2=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|^2-2\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|+1 \tag{4}$$

Par transitivité de l'action et la formule de Burnside on a

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g| = |X/G| = 1 \tag{5}$$

D'autre part G agit sur $X\times X$ de manière diagonale par $g.(x,y)=(g.x,g.y)$, $\forall g\in G$ et $\forall(x,y)\in X\times X$. La double transitivité de l'action de G sur X ce reformule exactement par le fait que l'action diagonale de G sur $X\times X$ a exactement deux orbite $\Delta := \{(x,x)\ x\in X\}$ et son complémentaire. De plus on a pour tout $g\in G$ $(X\times X)^g = X^g\times X^g$. On note k le nombre d'orbites pour l'action diagonale, on a alors $k=2$ si et seulement l'action de G sur X est doublement transitive. En appliquant la formule de Bunside à l'action diagonale il vient

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|^2=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|(X\times X)^g| = |(X\times X)/G| = k \tag{6}$$

Ainsi par les calculs précédents

$$<\chi,\chi>=k-1 \tag{7}$$

Et donc par la proposition V_X est irréductible ssi $k=2$ ssi l'action de G sur X et deux fois transitive.

$\square$

Références

[1] P.Caldero et J.Germoni. *Nouvelles histoires hédonistes de groupes et de géométries. Tome 2.* 2018.