

Isomorphismes de groupes linéaires

Théorème. *On a les isomorphismes suivants :*

$$PGL_2(\mathbb{F}_2) \cong S_3$$

$$PGL_2(\mathbb{F}_3) \cong S_4$$

$$PGL_2(\mathbb{F}_4) \cong A_5$$

$$PGL_2(\mathbb{F}_5) \cong S_5$$

Démonstration. L'action de $PGL_2(\mathbb{F}_q)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ est fidèle, et induit donc un morphisme injectif $PGL_2(\mathbb{F}_q) \rightarrow S(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q))$. On a $\#PGL_2(\mathbb{F}_q) = (q^2 - 1)q$ et $\#S(\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)) = (q + 1)!$.

| | | |
|-----|--------------|------------|
| q | $(q^2 - 1)q$ | $(q + 1)!$ |
| 2 | 6 | 6 |
| 3 | 24 | 24 |
| 4 | 60 | 120 |
| 5 | 120 | 720 |

Pour $q = 2, 3$, on a notre isomorphisme. Pour $q = 4$, on obtient que $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à un sous-groupe G d'indice 2 dans S_5 . Il contient en particulier les 3-cycles (on rappelle que $(ijk) = (ikj)^2$), qui engendrent A_5 qui est aussi d'indice 2, d'où le résultat.

Pour $q = 5$, on obtient que $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à un sous-groupe G d'indice 6 dans S_6 . De plus, $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ ne fixe aucune droite, donc G agit sans points fixes sur $\{1..6\}$.

On considère l'action de S_6 sur S_6/G par translation.

Cela induit un morphisme $\varphi : S_6 \rightarrow S(S_6/G) \cong S_6$. Notons que G fixe G par translation, donc $\varphi(G)$ est inclus dans un groupe de permutation qui fixe un élément (isomorphe à S_5). De plus, $\ker(\varphi) \subset G$, et comme $\ker(\varphi) \in \{0, A_6, S_6\}$, on a donc $\ker(\varphi) = 0$: φ est injective et par un argument de cardinal, G est isomorphe à S_5 . \square

Remarque. G est un sous-groupe de S_6 d'indice 6 qui ne fixe aucun éléments ; on peut se demander si il existe dans S_n un sous-groupe d'indice n qui ne fixe aucun élément. Il n'existe pas de tel groupe sauf pour $n = 4, 6$; pour $n = 4$, c'est dû au fait que S_4 admette d'autres sous-groupes distingués, et pour $n = 6$, que S_6 admette des automorphismes non-intérieur (l'isomorphisme φ de la preuve en est un exemple).