6 $H^1([0,1])$

ref : Allaire

THÉORÈME 6.1 *On pose* $H^1([0,1]) = \{u \in L^2([0,1]) \quad | \quad u' \in L^2([0,1])\}$, *la dérivée étant au sens des distributions.*

H^1 *est un espace de Hilbert, ses éléments sont des fonctions continues sur* $[0,1]$ *et l'injection* $H^1 \to C^0$ *est compacte.*

PREUVE. On munit H^1 du produit scalaire $< u, v >= \int uv + \int u'v'$. C'est clairement un produit scalaire. Si (u_n) est une suite de Cauchy de H^1, (u_n) et (u'_n) sont en particulier de Cauchy dans L^2 donc converge vers u et v dans L^2 car L^2 est complet. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(]0,1[)$, on a :

$$\int u'_n \varphi = -\int u_n \varphi'$$

On peut passer à la limite dans cette inégalité car la convergence dans L^2 est plus forte que celle dans $\mathcal{D}'$:

$$|\int_0^1 (u_n - u)\varphi| \leq \int_0^1 |u_n - u||\varphi| \leq \sqrt{\int |u_n - u|^2}\sqrt{|\varphi|^2}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Cela donne donc pour tout $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\int v\varphi = -\int u\varphi'$$

c'est-à-dire $v = u'$. Donc $u_n \to u$ dans H^1.

LEMME 6.2 *Les fonctions de* H^1 *sont l'intégrale de leur dérivée : pour tout* x,

$$u(x) = u(0) + \int_0^x u'(y)\mathrm{d}y$$

Notons $w(x)$ le membre de droite, qui est bien définie car u' est L^1 par Cauchy-Schwartz. Il est aussi continu par la même inégalité :

$$|w(x) - w(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\|u'\|_{L^2}$$

Calculons la dérivée de w au sens des distributions.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned} < w', \varphi > &= -\int_0^1 w\varphi' = -\int_0^1 u(0)\varphi' - \int_0^1 \int_0^x u'(y)\varphi'(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 u'(y) \int_y^1 \varphi'(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 u'(y)\varphi(y)\mathrm{d}y \end{aligned}$$

Donc $w' = u'$. Deux distributions qui ont même dérivée diffèrent d'une constante. (Si $u' = 0$, u est nulle contre toutes les dérivées de fonctions de $\mathcal{D}$, c'est-à-dire toutes les fonctions d'intégrale nulle. C'est aussi le cas de la fonction constante égale à 1. Deux formes linéaires ayant même noyau sont proportionnelles, donc u est constante). Donc u est continue.

Passons à l'injection compacte.

Si (u_n) est bornée dans H^1 par $M > 0$. L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$|u_n(x) - u_n(y)| \leq \sqrt{|x-y|}\|u_n'\|_{L^2} \leq M\sqrt{|x-y|}$$

ainsi que :

$$|u_n(x)| \leq K$$

La suite (u_n) est donc équicontinue car équihölderienne sur $[0,1]$ qui est compact et ponctuellement bornée. Par le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge uniformément vers u qui est continue.

$\square$

Leçons concernées : dérivation au sens des distributions, compacité, espaces de hilbert, espaces de fonctions.