

Leçon 207 : Prolongement de fonctions. Exemples et applications.

I. Prolongement : aspects topologiques

I - 1. Prolongement en un point

- Définition : Prolongement ponctuel [4]
- Exemple : $\frac{\sin(x)}{x}$ en 0 [4]
- Critère de Cauchy [1]
- Prolongement d'une application lipschitzienne [1]

I - 2. Prolongement par densité

- Principe de prolongement des identités [1]p.40
- Thm de prolongement d'une application uniformément continue [1]p.48
- Applications : les fonctions lipschitziennes [1]p.48
- : Définition : Transformation de Fourier [5]
- $S(\mathbb{R})$ dense dans $L^p(\mathbb{R})$ et $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ [5]
- **Dev 1 : Thm de Fourier-Plancherel**

II. Prolongement : aspects différentiels

II - 1. Prolongement des fonctions dérivables

[1]p.90

- f dérivable sur $I - \{a\}$, $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l \Rightarrow f$ est dérivable sur I
- $\exp(\frac{1}{x^2})$ est une fonction plate
- Existence de fonctions plateaux

II - 2. Equations différentielles

[3]p150

- Définition : Solutions maximales
- Prop : Toute solution se prolonge en une solution maximale
- Thm d'existence de Cauchy Lipschitz
- Exemple : Solutions maximales de $y' = y^2$

III. Prolongement analytique [2]

III - 1. Principe de prolongement analytique

- Thm de prolongement analytique
- Lemme d'analycité sur \mathbb{R} et \mathbb{C}
- Exemple : $f(1/n) = 1/n$

III - 2. Applications : Polynômes orthogonaux

- Définition : Fonction poids
- Définition : $L^2(I, \rho)$
- **Dev 2 : Densité des polynômes orthogonaux**

Bibliographie :

- 1-Pommellet : Cours d'analyse
- 2-Objectif agrégation

- 3-Demailly : Analyse numérique et equations différentielles
- 4- Gourdon : Analyse
- 5-Mohammed El amari : Analyse de Fourier dans les espaces fonctionnels