Rou

Théorème du relèvement

L 102
L 159
L 215
L 239

Lemme de Poincaré : Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ en $a \in U$.
et $\omega = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, dx_k : U \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ une forme différentielle $\mathcal{C}^1$.

Alors : $\exists f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ tq $df = \omega \iff \forall i, j \in [\![1, n]\!],\ \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}$

ie ω est exacte $\iff \omega$ est fermée.

Démonstration : $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, alors $df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$

on a $df = \omega \iff \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, dx_i$ d'où en identifiant : $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \alpha_i$.

alors $\forall i, j \in [\![1, n]\!]$, par le th de Schwarz, $\dfrac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x_j}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Nous allons déterminer f par analyse-synthèse.

Analyse : Soit f tq $df = \omega$. On pose $\gamma : \begin{array}{l} [0,1] \to U \\ t \mapsto a + t(x-a) \end{array}$ $\mathcal{C}^\infty$ et $g = f \circ \gamma \in \mathcal{C}^1$.

alors $\forall t \in [0, 1]$, $g'(t) = df_{\gamma(t)}(\gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a + t(x-a)).(x_i - a_i)$

D'où $\forall x \in U$, $f(x) - f(a) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)\, dt = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 P_i(a + t(x-a)).(x_i - a_i)\, dt$

Synthèse : Soit f définie $\forall x \in U$ par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 P_i(a + t(x-a))(x_i - a_i)\, dt$

Par composition et par le th de dérivation sur un compact,

$f \in \mathcal{C}^1$ et $\forall x \in U$,

$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, dx_j$.

Or $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \int_0^1 \frac{d}{dx_j}\left(P_i(\gamma(t))(x_i - a_i)\right) dt + \int_0^1 \frac{d}{dx_j}\left(P_j(t)\right)(x_j - a_j)\, dt$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t \,.\, \frac{\partial P_i}{\partial x_j}(\gamma(t))\,(x_i - a_i)\, dt + \int_0^1 P_j(\gamma(t))\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 t \,.\, \frac{\partial P_j}{\partial x_i}(\gamma(t)).(x_i - a_i)\, dt + \int_0^1 P_j(\gamma(t))\, dt$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left(P_j(a+t(x-a))\ t\right)dt \quad + \int_0^1 P_j(a+t(x-a))\,dt$$

$$= \Big[P_j(a+t(x-a)).\ t \Big]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 P_j(a+t(x-a))\,dt + \int_0^1 P_j(\gamma(t))\,dt$$

$$= P_j(x)$$

d'où $df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx_j = \sum_{j=1}^{n} P_j(x)\,dx_j = \omega(x)$ puis $df = \omega$.

Théorème du relèvement: Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{U}$, $\mathcal{C}^k$, $k \geqslant 2$

alors $\exists\, \theta : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^k$ telle que $\forall x \in U$, $f(x) = e^{i\theta(x)}$.

Démonstration : Soit f solution

alors $\forall j \in [\![1, n]\!]$, $\forall x \in U$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = i \frac{\partial \theta}{\partial x_j}(x)\, f(x)$

On pose donc $\omega : x \in U \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\,dx_j = \sum_{j=1}^{n} P_j(x)\,dx_j$

On a : ω est fermée : D'après le th de Schwarz, $\forall k, j \in [\![1, n]\!]$,

$$\frac{\partial P_k}{\partial x_j} = \frac{1}{i f^2}\left(f \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial P_j}{\partial x_k}.$$

Ainsi, d'après le lemme de Poincaré, $\exists\, \theta : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ tq $d\theta = \omega$

En choisissant $\theta(0)$ tel que $f(0) = e^{i\theta(0)}$,

l'application $x \mapsto f(x)e^{-i\theta(x)}$ a une différentielle nulle sur U, vaut 1 en 0

elle est donc constante égale à 1.

On a donc $\forall x \in U$, $f(x) = e^{i\theta(x)}$ et $\theta \in \mathcal{C}^k(U, \mathbb{R})$.