Leçon 229 : Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.

1 Fonctions monotones

Définition 1. Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$ et soit $f : I \to \mathbf{R}$. On dit que f est croissante si pour tous $x, y \in I$, $x < y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$. On dit qu'elle est strictement croissante si l'inégalité est stricte. On dit qu'elle est (strictement) décroissante si $-f$ est (strictement) croissante. On dit qu'elle est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 2. *Une application monotone est injective ssi elle est strictement monotone.*

Application 3. Spot $f : I \to \mathbf{R}$ monotone telle que $f(I) \subseteq I$ et soit (u_n) suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in I$.

1. Si f est croissante, alors (u_n) est monotone et son sens de monotonie est déterminé par le signe de $u_1 - u_0$.
2. Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante et les suites (u_{2k}) et (u_{2k+1}) sont monotones.

Théorème 4. *Soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ monotone. Alors f admet une limite (dans $\overline{\mathbf{R}}$) à gauche en tout point de $[a, b[$ et une limite à droite en tout point de $]a, b]$. De plus, pour tout $x \in]a, b[$, $f(x^-) \leqslant f(x^+)$.*

Théorème 5. *L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction monotone est au plus dénombrable.*

Proposition 6. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ monotone. Alors f est continue sur I ssi $f(I)$ est un intervalle.*

Corollaire 7. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ strictement monotone et continue. Alors $J = f(I)$ est un intervalle et f induit un homéomorphisme de I sur J.*

Théorème 8. *Soit $f :]a, b[\to \mathbf{R}$ dérivable. Alors f est croissante ssi $f' \geqslant 0$, et f est décroissante ssi $f' \leqslant 0$.*

Application 9. Soit $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ continue, positive et décroissante. Alors $\sum_{k=0}^{n} f(k) - \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ est décroissante et converge dans $\mathbf{R}_+$. En particulier, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

Exemple 10. La série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{1}{n}$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ ont même nature (divergente) et $H_n - \log(n) \to \gamma$ où γ est la constante d'Euler.

2 Fonctions convexes

Définition 11. Soit $C \subseteq \mathbf{R}^d$. On dit que C est convexe si pour tous $x, y \in C$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda) y \in C$.

Définition 12. Soit $C \subseteq \mathbf{R}^d$ un convexe et soit $f : C \to \mathbf{R}^d$. On dit que f est convexe si pour tous $x, y \in C$, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $f\big(\lambda x + (1 - \lambda y)\big) \leqslant \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y)$. On dit que f est strictement convexe si l'inégalité est stricte lorsque $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$.

Proposition 13. *Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$. Alors $f : I \to \mathbf{R}$ est convexe ssi pour tout $x_0 \in I$, l'application pente p_{x_0} :*

$$p_{x_0} \quad \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

est croissante.

Corollaire 14 (inégalité des trois pentes)**.** *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ convexe et soient $a < b < c \in I$. Alors :*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leqslant \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$$

Proposition 15. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ convexe. Alors f admet en tout point de $\mathring{I}$ une dérivée à gauche et à droite. Elle est donc continue en tout point de $\mathring{I}$ et de plus, f'_g et f'_d sont croissantes et vérifient $f'_g \leqslant f'_d$.*

Théorème 16. *Soit $f : I \to \mathbf{R}$ dérivable. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *f est convexe.*
2. *La courbe représentative de f est au-dessus des tangentes.*
3. *f' est croissante.*
4. *En supposant f deux fois dérivables, $f'' \geqslant 0$.*

Application 17 (quelques inégalités)**.**

1. $\forall x_1, \dots, x_n$ positifs, $(x_1 \cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$.
2. $\forall a, b$ positifs et $p, q \in \,]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$.
3. Si $f \in \mathrm{L}^p$ et $g \in \mathrm{L}^q$ avec p, q comme précédemment, alors $fg \in \mathrm{L}^1$ et $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$.
4. Si $f, g \in \mathrm{L}^p$, alors $\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Théorème 18. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^d$ et soit $f : U \to \mathbf{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *f est convexe.*
2. *$\forall x, y \in U$, $f(y) - f(x) \geqslant \mathrm{d}f(x).(y - x)$.*
3. *$\forall x, y \in U$, $\big(\mathrm{d}f(y) - \mathrm{d}f(x)\big).(y - x) \geqslant 0$.*
4. *En supposant f deux fois différentiable, $\mathrm{d}^2 f(x)$ est positive pour tout $x \in U$.*

Application 19 (méthode de Newton)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ C^2 strictement croissante telle que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Notons x^* l'unique zéro de f sur $[a, b]$. On considère la suite (x_n) définie par récurrence :

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

1. Il existe un intervalle $I = [x^* - \delta, x^* + \delta]$ stable par F tel que pour tout $x_0 \in I$, la suite (x_n) a une convergence d'ordre 2 vers x^*.
2. On suppose que $f'' > 0$, alors la suite (x_n) converge pour tout $x_0 \in I$. La convergence est d'ordre 2 et la suite est décroissante à partir d'un certain rang. De plus, on a l'équivalent lorsque $n \to +\infty$:

$$x_{n+1} - x^* \sim \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)} (x_n - a)^2$$

3 Optimisation

Théorème 20. *Soit C un convexe de $\mathbf{R}^d$ et soit $f : C \to \mathbf{R}$ strictement convexe. Alors f admet au plus un minimum global sur C.*

Définition 21. On dit que $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ est coercive si $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $\|x\| \to +\infty$.

Théorème 22. *Si $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ est strictement convexe et coercive, alors f admet un unique minimum global.*

Application 23 (algorithme du gradient à pas optimal)**.** Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ de classe C^1 telle que $\exists \alpha > 0$, $\forall u, v \in \mathbf{R}^n$,

$$\langle \nabla f(v) - \nabla f(u) \mid v - u \rangle \geqslant \alpha \|v - u\|^2$$

1. L'application f admet un unique minimum global sur $\mathbf{R}^n$, noté a.
2. Soit $u \in \mathbf{R}^n$ et soit $\varphi_u : t \mapsto f\big(u + t\nabla f(u)\big)$. Si $u \neq a$, alors φ_u admet un unique minimum global sur $\mathbf{R}$.

On définit alors (u_k) suite de $\mathbf{R}^n$ par $u_{k+1} = u_k$ si $u_k = a$ et $u_{k+1} = u_k + t_k \nabla f(u_k)$ où t_k réalise le minimum de φ_{u_k}.

3. $\forall k$, $\nabla f(u_{k+1}) \perp \nabla f(u_k)$ et la suite (u_k) converge vers a pour tout choix de u_0.

Exemple 24. Soit A symétrique définie positive et soit f la fonctionnelle quadratique $f(x) = \frac{1}{2}\langle Ax \mid x\rangle - \langle b \mid x\rangle$. Alors minimiser f revient à résoudre $Ax = b$. L'algorithme du gradient à pas optimal s'applique et le réel t_k est donnée explicitement par :

$$t_k = \frac{\| w_k \|}{\langle A w_k \mid w_k \rangle}, \quad w_k = A u_k - b$$

4 Applications en probabilités

Définition 25. Soit X v.a. réelle. On définit la fonction de répartition de X par $F_X(t) = \mathbf{P}(X \leqslant t)$.

Proposition 26. *Soit X une v.a. réelle.*

1. *F_X est croissante, continue à droite en tout point et admet une limite à gauche en tout point.*
2. $\lim_{-\infty} F_X = 0$ *et* $\lim_{+\infty} F_X = 1$.
3. *F_X est continue en un point x ssi* $\mathbf{P}(X = x) = 0$.
4. *F_X caractérise la loi : si $F_X = F_Y$ alors X et Y ont la même loi.*

Exemple 27. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a. indépendantes avec X_i de loi $\mathscr{G}(p_i)$, $p_i \in]0,1[$. Alors $\min(X_1, \ldots, X_n)$ suit une loi géométrique de paramètre $1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$.

Définition 28. On dit que (X_n) converge en loi vers X si pour toute fonction f continue bornée, $\mathbf{E}[f(X_n)] \to \mathbf{E}[f(X)]$.

Théorème 29. (X_n) *converge en loi ssi pour tout t point de continuité de F_X, $F_{X_n}(t) \to F_X(t)$.*

Exemple 30. Soit (X_n) une suite de v.a. de loi $\mathscr{U}([0,\theta])$ avec $\theta > 0$. Posons $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Alors $n(\theta - M_n) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathscr{E}(\frac{1}{\theta})$.

Proposition 31 (Jensen)**.**

Exemple 32. une application de Jensen.

Application 33 (processus de Galton–Watson)**.** Soients $(X_{n,j})$ des v.a. dans $\mathbf{N}$ indépendantes et de même loi μ admettant une espérance m. On suppose que $\mu(0) \in]0,1[$. On note $Z_0 = 1$ et $Z_{n+1} = \sum_{j=1}^{Z_n} X_{n,j}$. On s'intéresse la probabilité de l'évènement « extinction » $E = \bigcup_n \{Z_n = 0\}$. Alors si $m \leqslant 1$, $\mathbf{P}(E) = 1$ et si $m > 1$ alors $\mathbf{P}(E) < 1$.

Développements

1. Méthode du gradient à pas optimal. **[23]**
2. Processus de Galton–Watson. **[33]**

Références

— Beck, Malick et Peyré, *Objectif agrégation*.
— Cottrell, Exercices de probabilité.
— Garet et Kurtzman, *De l'intégration aux probabilités*.
— Gonnord et Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation*.
— Gourdon, *Les maths en tête, analyse*.
— Ramis, Deschamps et Odoux, *Cours de mathématiques spéciales tome 3 : topologie et éléments d'analyse*.
— Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*.