

Méthode QR

Commençons par un résultat sur la décomposition QR , que l'on admet.

Théorème. Soit $T_n^+(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à diagonale strictement positive. On a un homéomorphisme :

$$\begin{cases} U_n(\mathbb{C}) \times T_n^+(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) \\ Q, R \mapsto QR \end{cases}$$

De plus, on peut construire l'application inverse.

Théorème. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ diagonalisable, on suppose que ses valeurs propres sont de module distincts et on les classe par module décroissant. On construit la suite

$$\begin{cases} A_0 = A \\ A_{k+1} = R_k Q_k \text{ où } A_k = Q_k R_k \text{ est la décomposition } QR \text{ de } A_k \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ tel que $A = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et P^{-1} admet une décomposition $L - U$.

Alors la diagonale de A_k converge vers $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, et les coefficients sous la diagonale tendent vers 0.

Démonstration. On note $Q^{(k)} = Q_1 \dots Q_k$, $R^{(k)} = R_k \dots R_1$, on a les relations suivantes :

$$\begin{aligned} A^k &= Q^{(k)} R^{(k)} \\ A_k &= Q^{(k)*} A Q^{(k)} \end{aligned}$$

Cela se montre aisément par récurrence, en notant que $Q^{(k)} R_k = A Q^{(k-1)}$.

Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = PDP^{-1}$ où D est la diagonale des valeurs propres classées par module décroissants. On note $P = QR$ la décomposition QR de P et on suppose que P^{-1} admet une décomposition LU (ce qui est vrai pour toute matrice "générique"). L'idée va être alors d'écrire la décomposition QR de A^k pour identifier $Q^{(k)}$, et donc A_k grâce à la seconde formule ci-dessus.

$$\begin{aligned} A^k &= QRD^kLU \\ &= QR(D^kLD^{-k})D^kU \end{aligned}$$

Comme L est triangulaire inférieure et les modules de la diagonale D sont strictement décroissant, et que les coefficients diagonaux de L sont 1, on en déduit que $D^kLD^{-k} \rightarrow I$. Soit $O_k T_k$ la décomposition QR de $RD^kLD^{-k}R^{-1}$, comme la décomposition QR est un homéomorphisme, O_k et T_k convergent vers l'identité. On poursuit le calcul :

$$\begin{aligned} A^k &= (QO_k)(T_kRLU) \\ &= (QO_k \Delta \Delta_D^k) (\Delta \Delta_D^k T_k RLU) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{où } \Delta &= \text{sign}(\text{Diag}(L)), \\ \Delta_D &= \text{sign}(\text{Diag}(U)) \end{aligned}$$

On peut donc identifier $Q^{(k)} = QO_k\Delta\Delta_D^k$.

$$\begin{aligned} A_k &= \Delta_D^k \Delta O_k^* Q^* A Q O_k \Delta \Delta_D^k \\ &= \Delta \Delta_D^k O_k^* R^{-1} D R O_k \Delta \Delta_D^k \end{aligned}$$

Or, comme $O_k \rightarrow I$, on a $\text{diag}(A_k) = \text{diag}(O_k^* R^{-1} D R O_k) \rightarrow \text{diag}(R^{-1} D R) = \text{diag}(D)$, d'où le résultat. \square

Remarque. *On peut aussi noter que la partie supérieure de A_k converge **en module**.*