Théorème de Lévy

Référence : H. Queffélec, C. Zuily, *Éléments d'Analyse*, Dunod, 2002.

Leçons concernées : 250, 260, 261, 262.

Définition 1. On dit qu'une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires converge en loi vers X si pour toute fonction continue bornée f, $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.

Pour une variable aléatoire X on note $\varphi_X(t) := \mathbb{E}[e^{itX}]$ sa fonction caractéristique. On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f(x) \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 2 (Lévy)**.** *Soit $X, X_1, \dots, X_n, \dots$ des variables aléatoires. Alors on a équivalence entre*

(i) La suite $(X_n)_n$ converge en loi vers X

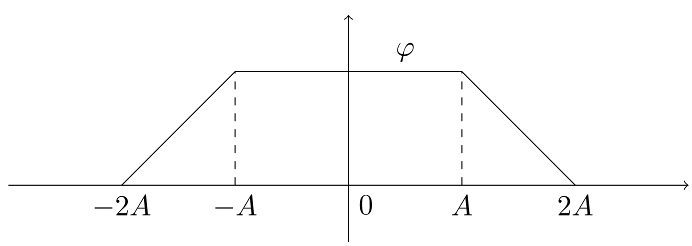
(ii) La suite de fonctions $(\varphi_{X_n})_n$ converge simplement vers φ_X.

On commence par montrer la proposition suivante :

Proposition 3. *Une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoires converge en loi vers X si et seulement si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, $\mathbb{E}[f(X_n)] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[f(X)]$.*

Démonstration. Le sens direct est évident puisqu'une fonction de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est bornée.

Réciproquement, soit $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}_b^0(\mathbb{R})$ et soit $A > 0$ tel que $\mathbb{P}_X(x, |x| \geqslant A) \leqslant \varepsilon$. On pose $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ la fonction valant 1 sur $[-A, A]$, 0 en dehors de $[-2A, 2A]$, et affine entre $-2A$ et $-A$ et entre A et $2A$:



On a

$$\int_{\mathbb{R}} (1-\varphi)\, d\mathbb{P}_X \leqslant \mathbb{P}_X(x, |x| \geqslant A) \leqslant \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\, d\mathbb{P}_X = \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\, d\mathbb{P}_{X_n} + \left[\int_{\mathbb{R}} f\varphi\, d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f\varphi\, d\mathbb{P}_X\right] + \int_{\mathbb{R}} f(1-\varphi)\, d\mathbb{P}_X =: A_n + B_n + C_n.$$

On a alors $|A_n| \leqslant ||f||_\infty \int_{\mathbb{R}}(1-\varphi)d\mathbb{P}_{X_n} = ||f||_\infty \left(1-\int_{\mathbb{R}} \varphi d\mathbb{P}_{X_n}\right)$ d'où $\limsup_n |A_n| \leqslant ||f||_\infty \left(1-\int_{\mathbb{R}} \varphi d\mathbb{P}_X\right) = ||f||_\infty \int_{\mathbb{R}}(1-\varphi)d\mathbb{P}_X \leqslant \varepsilon ||f||_\infty$ par hypothèses. D'autre part, $|B_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ puisque $f\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $|C_n| \leqslant \varepsilon ||f||_\infty$. On a alors

$$\limsup_n \left| \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_{X_n} - \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_X \right| \leqslant 2\varepsilon ||f||_\infty$$

et donc $|\mathbb{E}[f(X_n)] - \mathbb{E}[f(X)]| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

Démonstration (Théorème). L'implication (i) $\Rightarrow$ (ii) est directe en remarquant que $f(x) := e^{itx}$ est continue bornée pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, on se donne f de la forme $f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(t)dt$ avec $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$. Par les théorèmes de Fubini et de convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{itX_n}\varphi(t)dt\right] &= \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}\left[e^{itX_n}\right] dt \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\mathbb{E}\left[e^{itX}\right] dt = \mathbb{E}\left[\int_{\mathbb{R}} e^{itX}\varphi(t)dt\right] = \mathbb{E}[f(X)].\end{aligned}$$

Maintenant, si $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$, on sait qu'il existe $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que $||f-g||_\infty \leqslant \varepsilon$. Or $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et donc par bijectivité de la transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, g s'écrit $g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\varphi(t)dt$ avec $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$, et on conclut par inégalité triangulaire en remarquant que pour toute variable aléatoire Y, $\mathbb{E}[(f-g)(Y)] \leqslant ||f-g||_\infty$. □

On peut déduire de ce théorème le théorème central limite, au moyen du lemme suivant :

Lemme 4. *Soit $(z_n)_n$ une suite de nombres complexes de limite $z \in \mathbb{C}$, alors*

$$\left(1+\frac{z_n}{n}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^z.$$

Théorème 5 (Central limite)**.** *Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On note $m = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1)$. Alors si $S_n = \sum_{k=1}^n X_n$,*

$$\frac{S_n - mn}{\sqrt{n}\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Démonstration. On peut sans perte de généralité se ramener au cas $m = 0$ et $\sigma = 1$. On utilise le théorème précédent et on cherche donc à montrer que $\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) \to e^{-t^2/2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On note $\varphi := \varphi_{X_1}$. Puisque X_1 admet un moment d'ordre 2, φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie : $\varphi'(0) = \mathbb{E}[iX_1] = 0$ et $\varphi''(0) = [-X^2] = -1$. On a d'autre part

$$\begin{aligned}
\varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) &= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k/\sqrt{n}}\right] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{itX_k/\sqrt{n}}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{itX_1/\sqrt{n}}\right]^n = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o(\frac{1}{n})\right)^n .
\end{aligned}$$

On conclut donc avec le lemme. $\square$