Théorème Taubérien fort

Léo Gayral

2017-2018

ref : Gourdon – Analyse, 2e édition – p.289

Lemme 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a $(1-x)\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x^n P(x^n) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 P(t)dt$.

Démonstration.
Il suffit de le montrer sur X^k, puis de conclure par linéarité du passage à la limite et de l'intégrale. Dans ce cas, on a bien :

$$(1-x)\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{n(k+1)} = \frac{1-x}{1-x^{k+1}} = \frac{1}{1+x+\cdots+x^k} \to \frac{1}{k+1} = \int\limits_0^1 t^k dt\ .$$

$\square$

Théorème 1. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ un $O\left(\frac{1}{n}\right)$, de sorte que la série entière $F(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Si $F(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$, alors $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration.
Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$. Pour $x \in [0,1[$, lorsque $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \varphi\left(x^k\right)$ converge pour $n\to\infty$, on note $S_\varphi(x)$ sa limite. On s'intéresse par la suite à Φ l'ensemble des fonctions pour lesquelles $S_\varphi(x) \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 0$. On veut montrer que $g := \mathbb{1}_{\left[\frac{1}{2},1\right]} \in \Phi$. Dans ce cas, pour $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ on a la convergence de $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = S_g(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Si $x \in [0,1[$, alors $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $(a_n g(x^n))$ est nulle à partir d'un rang. En d'autres termes, $S_g \in \mathbb{R}^{[0,1[}$ est bien définie, il faut juste étudier son comportement en 1^-. On va pour ce faire encadrer g par des polynômes.

Pour $k > 0$, $X^k : x \mapsto x^k$ et $x \in [0, 1[$, on a $\left(a_n X^k\left(x^n\right)\right)$ sommable, de limite $F\left(x^k\right)$. En particulier, $F\left(x^k\right) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$, donc $X^k \in \Phi$. Il en découle $X \cdot \mathbb{R}[X] \subset \Phi$.

Posons $h(x) := \frac{g(x)-x}{x(1-x)} = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x-1} & \text{si} \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$. On peut encadrer h par $s_1 \leq h \leq s_2$ continues, de sorte que $\int_0^1 s_2 - s_1 \leq \epsilon$. Par le théorème de Weierstrass, on peut uniformément approcher $s_1 - \epsilon$ (resp. $s_2 + \epsilon$) par un polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}[X]$ (resp. Q_2) à ϵ près sur $[0, 1]$. Il en découle $Q_1 \leq h \leq Q_2$ et $\int_0^1 Q \leq 5\epsilon$ avec $Q = Q_2 - Q_1 \geq 0$. Soient donc $P_i = X + X(1-X)Q_i \in X \cdot \mathbb{R}[X] \subset \Phi$: on a alors l'encadrement $P_1 \leq X + X(1-X)h = g \leq P_2$, et la majoration $\int_0^1 P_2 - P_1 = \int_0^1 x(1-x)Q(x)dx \leq 5\epsilon$. Comme $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, on a $M > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \left|S_g(x) - S_{P_1}(x)\right| &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \left(g\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right)\right) \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \left(P_2\left(x^n\right) - P_1\left(x^n\right)\right) \\ &\leq M \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{P_2(x^n) - P_1(x^n)}{n} \\ &\leq M \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1-x^n}{n} x^n Q\left(x^n\right) \\ &\leq M \sum_{n \in \mathbb{N}} (1-x) x^n Q\left(x^n\right) \end{aligned}$$

car $(1 - x^n) = (1-x)\left(1 + x + \cdots + x^{n-1}\right) \leq n(1-x)$. Par le premier lemme, on en déduit que le terme de droite converge vers $M \int_0^1 Q \leq 5M\epsilon$:

$$\left|S_g(x)\right| \leq \left|S_{P_1}(x)\right| + 5M\epsilon + \underset{x \to 1^-}{o}(1) \ .$$

d'où $\overline{\lim_{x \to 1^-}} \left|S_g(x)\right| \leq 5M\epsilon$ pour $\epsilon > 0$ arbitrairement petit, $S_g(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0$. Autrement dit, $g \in \Phi$, ce qui conclut la preuve. □

Remarque 1. Quitte à remplacer F par $F - F(1^-)$ dans la preuve précédente, le résultat est plus généralement vrai dès que F converge pour $x \to 1^-$. Avec des arguments de convergence monotone pour les (a_n) positifs, on peut plus généralement supposer (na_n) minorée, plutôt que bornée comme ici.

C'est ce résultat plus général qui est connu sous le nom de théorème Taubérien fort de Hardy-Littlewood.

Application 1. Soit $F(x) = \ln(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n}$. On a $F(1^-) = \ln(2)$, donc la somme alternée $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers $-\ln(2)$.