Théorème de Cauchy-Lipschitz local

Léo Gayral

2017-2018

ref : Demailly – Analyse numérique et équations différentielles – p.153

Définition 1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$. $f \in \mathcal{C}^0\left(\Omega, \mathbb{R}^d\right)$ est dite localement lipschitzienne par rapport à la seconde variable lorsque pour tout $(t_0, x_0) \in \Omega$ il existe un voisinage $U \subset \Omega$ de (t_0, x_0) et $k > 0$ tels que :

$$\forall (t,x),(t,x') \in U, \|f(t,x) - f(t,x')\| \leq k \|x - x'\| \ .$$

Théorème 1 (Version locale)**.** Soit $(t_0, x_0) \in \Omega$. On considère le problème $\begin{cases} x'(t) &= f(t,x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$. Alors il existe $h > 0$ et $x \in \mathcal{C}^1\left(I_h, \mathbb{R}^d\right)$ tels que $\Gamma(x) \subset \Omega$ et x solution du problème sur l'intervalle $I_h := [t_0 - h, t_0 + h]$.

Démonstration.
Dire que (I, x) est une solution du problème équivaut à vérifier $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(u, x(u))du$ sur I. On peut donc voir x comme le point fixe d'un certain opérateur *non linéaire*, qu'on va maintenant chercher à définir sur un espace adapté.

On pose $B_r = \overline{B}(x_0, r)$, et l'espace métrique complet $\mathcal{F} = \left(\mathcal{C}^0\left(I_h, B_r\right), ||.||_\infty\right)$. On fixe en outre $h, r > 0$ tels que $I_h \times B_r \subset U$ un cylindre de Ω où f est k-lipschitzienne sur la seconde variable. Ce cylindre étant inclus dans Ω le domaine de définition de f, on peut définir l'opérateur suivant :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \to & \mathcal{C}^1\left(I_h, \mathbb{R}^d\right) \\ x & \mapsto & \left[t \mapsto x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(u, x(u))du\right] \end{array} .$$

Par continuité sur un compact, on considère $M = ||f||_{L^\infty(I_h \times B_r)} < \infty$. Soient alors $x \in \mathcal{F}$ et $t \in I_h$. On a la majoration :

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)(t) - x_0\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} f(u, x(u))du \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(u, x(u))\| \, du \right| \\ &\leq |t - t_0| \, M \end{aligned}$$

donc quitte à remplacer h par $\min\left(h, \frac{r}{M}\right)$ on a $\Phi(x) \in \mathcal{F}$. Φ est un opérateur sur l'espace métrique $\mathcal{F}$, et on a la majoration $\|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|f(u, x(u)) - f(u, y(u))\| \, du \right| \leq hk \|x - y\|_\infty$. Quitte à remplacer h par $\min\left(h, \frac{k}{2}\right)$, on obtient bien un opérateur contractant. Par le théorème de point fixe de Banach-Picard, Φ admet un unique point fixe sur I_h ; il existe une unique solution au problème sur I_h donnée par ce point fixe. □

Corollaire 1 (Version globale)**.** Supposons de plus que $\Omega = I \times \mathbb{R}^d$ et que f est localement en temps globalement lipschitzienne sur sa seconde variable :

$$\forall J \subset\subset I, \exists k > 0, \forall t \in J, f_t \text{ est } k\text{-lipschitzienne.}$$

Alors il existe une unique solution au problème précédent, définie globalement sur I. C'est en particulier le cas des équations différentielles linéaires, où $[t \mapsto f_t] \in \mathcal{C}^0\left(I, \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$.

Démonstration.
Soient $t_0 \in J \subset\subset I$ et $\mathcal{F} = \left(\mathcal{C}^0\left(J, \mathbb{R}^d\right), \|.\|_\infty\right)$. En définissant Φ comme précédemment, on obtient un opérateur sur $\mathcal{F}$ sans contrainte aucune sur J. A priori, Φ est $\mu(J)k$-lipschitzienne, et non contractante.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall x, y \in \mathcal{F}, \forall t \in J, \|\Phi^n(x)(t) - \Phi^n(y)(t)\| \leq \frac{(|t - t_0| \, k)^n}{n!} \|x - y\| \, .$$

Le rang $n = 0$ est évident et pour $x, y \in \mathcal{F}$ et $t \in J$ on a :

$$\begin{aligned}
\left\|\Phi^{n+1}(x)(t) - \Phi^{n+1}(y)(t)\right\| &= \left\|\int_{t_0}^{t} f\left(u, \Phi^n(x)(u)\right) - f\left(u, \Phi^n(y)(u)\right) du\right\| \\
&\leq \left|\int_{t_0}^{t} \left\|f\left(u, \Phi^n(x)(u)\right) - f\left(u, \Phi^n(y)(u)\right)\right\| du\right| \\
&\leq k\left|\int_{t_0}^{t} \left\|\Phi^n(x)(u) - \Phi^n(y)(u)\right\| du\right| \\
&\leq \frac{k^{n+1}}{n!}\left|\int_{t_0}^{t} |u - t_0|^n\, du\right| \times \|x - y\| \\
&\leq \frac{k^{n+1}}{n!} \times \frac{|t-t_0|^{n+1}}{n+1} \times \|x - y\|
\end{aligned}$$

d'où le résultat voulu. En particulier, on en déduit que Φ^n est $\frac{(\mu(J)k)^n}{n!}$-lipschitzienne. Cette constante tends vers 0 pour $n \to \infty$ donc en particulier, à partir d'un rang n, Φ^n est contractante, et admet donc un unique point fixe x^*.

En outre, la suite $\left(\Phi^{jn}(x)\right)_j$ converge vers x^* pour tout $x \in \mathcal{F}$, donc c'est en particulier le cas pour la suite $\left(\Phi^{jn}\left(\Phi\left(x^*\right)\right)\right)$ constante égale à $\Phi\left(x^*\right)$. On en déduit que x^* est un point fixe de Φ. En outre, tout point fixe de Φ est point fixe de ses itérées, de Φ^n, donc égal à x^*. On a donc unicité de la solution au problème sur J.

Une solution globale sur I est en particulier uniquement définie sur tout intervalle de temps compact J par ce qui précède, donc uniquement définie comme l'union des uniques solutions sur chacun des intervalles de temps compacts – on a bien $I = \bigcup\limits_{J \subset\subset I} J$. $\square$

Remarque 1. Dans le cas local, l'argument de point fixe ne permet pas de montrer l'unicité des solutions de façon générale, et on est forcé d'invoquer des arguments du type *inégalité de Gronwall* pour constater que deux solutions égales en un point suivent en fait le même champ de vecteurs, sont donc égales sur leur domaine de définition commun, et peuvent être réunies en une seule solution sur l'union de leurs domaines.