Suite récurrente à convergence lente

Léo Gayral

2017-2018

ref : FGN – Oraux X-ENS, Analyse 1 – p.99

Théorème 1. Soient U un voisinage ouvert de 0, $\alpha > 1$ et $\beta > 0$ de sorte $f : U \to \mathbb{R}$ vérifie $f(x) = x - \beta x^\alpha + o(x^\alpha)$ en 0.

Alors il existe un nombre $\eta > 0$ tel que $\forall u_0 \in]0, \eta[$, la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ induit bien une suite (u_n), qui vérifie $u_n \sim \frac{1}{(n\beta(\alpha-1))^{\frac{1}{\alpha-1}}}$.

Démonstration.
La fonction f est en particulier dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. On peut écrire $f(x) = x \times (1 - \beta x^{\alpha-1} \times (1 + o(1)))$. On fixe $\eta > 0$ tel que $|o(1)| < \frac{1}{2}$ et $\eta < \left(\frac{2}{3\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, afin de garantir $\beta x^{\alpha-1}(1 + o(1)) \in]0, 1[$ lorsque $0 < x < \eta$. En particulier, f stabilise l'intervalle $[0, \eta[$, sur lequel on travaille à partir de maintenant.

Soit $u_0 \in]0, \eta[$. D'après ce qui précède, la suite (u_n) est bien définie, strictement positive et décroissante. Montrons qu'elle converge vers $u_\infty = 0$. Si $u_\infty > 0$, alors à partir d'un certain rang, on a $u_n \in]u_\infty, u_\infty + \epsilon[$, ce qui pour ϵ assez faible garantit un $\theta < 1$ tel que $u_{n+1} \leq \theta u_n$. Ceci implique alors $u_\infty = 0$, ce qui contredit notre hypothèse.

On va maintenant s'intéresser à la suite $v_n = u_n^{1-\alpha}$, strictement croissante. Étant donné que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ on a :

$$v_{n+1} = v_n \times \left(1 - \frac{\beta}{v_n} \times (1 + o(1))\right)^{1-\alpha} = v_n \left(1 + \frac{\beta(\alpha - 1)}{v_n} + o\left(\frac{1}{v_n}\right)\right)$$

d'où $v_{n+1} - v_n = \beta(\alpha - 1) + o(1)$. On remarque que si $\theta_n \to 0$, alors on a la convergence de la suite au sens de Cesaro de la suite, autrement dit $\sum\limits_{i=1}^{n} \theta_n = o(n)$. En conséquence, en télescopant la somme, on en déduit $v_n = n \times \beta(\alpha - 1) + o(n)$ et donc le résultat initial. $\square$

Remarque 1 (Convergence lente)**.** On dit qu'une suite strictement positive (u_n) converge géométriquement vers 0 lorsque $\exists \theta \in]0,1[, u_n \leq \theta^n$, ou bien autrement dit lorsque $\exists C > 0, -\ln(u_n) \geq C \times n$.

Dans le cas ci-dessus, on a $-\ln(u_n) \sim (\alpha - 1) \times \ln(n)$, ce qui est infiniment plus lent.

On va maintenant chercher, sur un exemple, le terme suivant du développement asymptotique de u_n. Cette méthode peut se généraliser dès lors que f admet un développement à l'ordre 3 en 0.

Application 1. Soit $f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$. D'après ce qui précède, on a $u_n \sim \frac{2}{n}$, pour $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ quelconque. Montrons que l'ordre suivant est :

$$u_n - \frac{2}{n} \sim \frac{2\ln(n)}{3n^2} \ .$$

Démonstration.
Dans ce cas particulier, on a $v_n = \frac{1}{u_n}$, et $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{\ln(1+u_n)} - \frac{1}{u_n}$. En 0, on a le développement limité suivant :

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} & = & \frac{1}{x} \times \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + O(x^3)} - 1 \right) \\ & = & \frac{1}{x} \times \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \left[\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} \right]^2 + O(x^3) \right) \\ & = & \frac{1}{x} \times \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + O(x^3) \right) \\ & = & \frac{1}{2} - \frac{x}{12} + O(x^2) \end{array}$$

En appliquant ce développement à v_n on obtient :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{2} - \frac{u_n}{12} + o(u_n) \\ & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{6n} + o(\frac{1}{n}) \end{array}$$

En télescopant la somme, on obtient alors $v_n = \frac{n}{2} - \frac{\ln(n)}{6} + o(\ln(n))$. En passant à l'inverse, on obtient finalement :

$$\begin{array}{rcl} u_n & = & \frac{2}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \\ & = & \frac{2}{n} \times \left(1 + \frac{\ln(n)}{3n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \\ & = & \frac{2}{n} + \frac{2\ln(n)}{3n^2} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) \end{array}$$

□