Suite de polygones

Léo Gayral

2017-2018

ref : Gourdon – Algèbre, 2e édition – p.180

Remarque 1 (Matrices circulante et déterminant)**.** On considère la matrice suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})\,.$$

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$. $P(J)$. Un calcul direct donne :

$$P(J) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})\,.$$

Une telle matrice est dite *circulante*. Le même calcul donne $J^n = I_n$ donc $\chi_J = X^n - 1$ est scindé à racines simples, J se diagonalise en $\Omega = \operatorname{diag}\left(\omega^j, 0 \leq j \leq n-1\right)$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ une racine primitive de l'unité. On en déduit que $P(J)$ se diagonalise en $\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k \Omega^k$ et donc que $\det(P(J)) = \prod\limits_{j=0}^{n-1} P\left(\omega^j\right)$.

Application 1. Soit $P_0 \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ un polygone à n sommets. On définit la suite de polygones (P_k) par $P_{k+1,i} = \frac{P_{k,i}+P_{k,i+1}}{2}$, de sorte que les sommets de P_{k+1} soient les milieux des côtés de P_k, dans le même ordre.

Soit $g = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_{0,i}$ l'isobarycentre de P_0. La suite P_k converge géométriquement vers le "polygone" constant g.

Démonstration.

Quitte à identifier $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ à $[\![1,n]\!]$ et P_k à $\begin{pmatrix} P_{k,1} \\ \vdots \\ P_{k,n} \end{pmatrix}$ on a la relation matricielle $P_{k+1} = AP_k = A^{k+1}P_0$ avec $A = \frac{I_n+J}{2}$.

On peut alors montrer que $\left(A^k\right)$ converge géométriquement vers la matrice $B = \left(\frac{1}{n}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, car dans ce cas, $||P_k - g|| = ||(A^k - B)P_0|| \leq |||A^k - B||| \times ||P_0||$.

Comme $XI_n - A = \left(X - \frac{1}{2}\right) I_n - \frac{1}{2}J$ est un polynôme en J, c'est une matrice circulante donc $\chi_A(X) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(X - \frac{1+\omega^j}{2}\right)$. Ce polynôme est lui-même scindé à racines simples, donc $A = P \times \operatorname{diag}\left(\frac{1+\omega^j}{2}, 0 \leq j \leq n-1\right) \times P^{-1}$. Il en découle que A^k converge géométriquement vers $B = P\operatorname{diag}\left(1, 0, \ldots, 0\right) P^{-1}$ de rang 1.

Si on considère $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, on a $AX = X$ donc en passant a la limite, par continuité, $BX = X$. Comme $X \in \operatorname{Im}(B)$ de dimension 1, on a $B = (b_1 X, \ldots, b_n X)$. En outre, A préserve l'isobarycentre d'un polygone P quelconque :

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \frac{P_i + P_{i+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_i + \frac{1}{n}\sum_{j=i+1\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} P_j\right).$$

Donc en passant à la limite, B également. Autrement dit, b_i est l'isobarycentre du i-ième vecteur de base de $\mathbb{C}^n$, soit $\frac{1}{n}$. On a donc bien le résultat voulu. $\square$

Remarque 2. Le raisonnement précédent reste vrai si on considère n nombres réels plutôt que n affixes complexes. En conséquence, en raisonnement coordonnée par coordonnée, le résultat est plus généralement vrai pour n points quelconques de $\mathbb{R}^n$ et pas seulement dans le plan.