# Espace des translatées d'une fonction de dimension finie

Léo Gayral

2017-2018

ref : FGN – Oraux X-ENS, Algèbre 1 – p.300

**Lemme 1.** Soient $h_1, \ldots, h_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ des fonctions *linéairement indépendantes.* Alors $\exists (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, tels que $A := (h_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq r} \in GL_r(\mathbb{C})$.

*Démonstration.*
On considère le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}\,(h_1, \ldots, h_r)$ de dimension $r$. Soit $F = \{\mathrm{ev}_x, x \in \mathbb{R}\} \subset E^*$. On a $F^\perp = \{h \in E, \forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 0\} = \{0\}$ et $\dim(E^*) = \dim(E) < \infty$ donc $\mathrm{Vect}\,(F) = E^*$. On peut donc extraire de $F$ une base $(ev_{x_j})_{1 \leq j \leq r}$ de $E^*$. On définit alors $A \in M_r(\mathbb{C})$ comme dans l'énoncé du lemme.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^r$ un vecteur ligne. On a $(\lambda A)_i = \sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k A_{k,i} = ev_{x_i}\left(\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k h_k\right)$. Si $\lambda A = 0$ alors $\sum\limits_{k=1}^{r} \lambda_k h_k \in (E^*)^\perp = \{0\}$. D'où $A$ injective, inversible. □

**Théorème 1.** Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On définit $\tau_a f : x \mapsto f(x + a)$ les translatées de $f$ et $E = \mathrm{Vect}\,(\tau_a f, a \in \mathbb{R})$.

Alors $E$ est de dimension finie ssi $f \in \mathcal{C}^\infty$ est solution d'une équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants.

Dans ce cas, l'ordre minimal d'une telle EDL est $\dim(E)$ et $E$ est l'espace de ses solutions.

*Démonstration.*
Supposons $\dim(E) = r < \infty$. On considère en particulier $(f_1, \ldots, f_r)$ une base de $E$ constituée de translatées de $f$. On définit alors $g_i : x \mapsto \int\limits_0^x f_i(t)dt$ ; comme $f_i \in L^1_{loc}$, on a $g_i \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Les fonctions $(g_i)_{1\leq i\leq r}$ sont linéairement indépendantes. En effet, si on a $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i g_i = c \in \mathbb{C}$, alors par le théorème de différentiation de Lebesgue $\sum_{i=1}^{r}\lambda_i f_i \equiv 0$, or les $(f_i)$ sont linéairement indépendants, donc $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = c = 0$. On en déduit que l'espace $G = \mathrm{Vect}\,(g_1, \ldots, g_r, g_{r+1} = 1) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est de dimension $s = r+1 < \infty$ et stable par translation.

$G$ est en fait l'espace des primitives de fonctions de $E$, ce qui correspondra à augmenter de 1 l'ordre de toutes les dérivées dans l'EDL dont $f$ est solution.

Par stabilité par translations, on a $\tau_a g_i \in G$ et

$$\forall a \in \mathbb{R}, \exists (\lambda_{i,j}(a))_{1\leq j\leq s} \in \mathbb{C}^s, \tau_a g_i = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{i,j}(a) g_j \ .$$

D'une part, en fixant $x = 0$, on a $g_i = \lambda_{i,s}$. D'autre part, si $G_i(x) := \int_0^x g_i(t)dt$, alors en intégrant les égalités précédentes de 0 à $x \in \mathbb{R}$ à $a$ fixé, on en déduit que $G_i(x+a) - G_i(a) = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{i,j}(a) G_j(x)$.

Par le lemme, on en déduit une famille $(x_j)$ et une matrice $A \in GL_s(\mathbb{C})$ associée aux $(G_i)$. On définit alors les matrices $B(a) = (G_i(a+x_j) - G_i(a))$ et $\Lambda(a) = (\lambda_{i,j}(a))$. On remarque que $B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, M_s(\mathbb{C}))$ et $B = \Lambda A$, donc $\Lambda = B \times A^{-1}$ est également continûment dérivable, d'où $g_i \in \mathcal{C}^1$ en particulier.

Plus généralement, on a $\forall i, g_i \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ implique $B \in \mathcal{C}^{k+1}$ implique $\Lambda \in \mathcal{C}^{k+1}$ implique $\forall i, g_i \in \mathcal{C}^{k+1}$. Par récurrence, on en déduit que $E \cup G \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\Lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, M_n(\mathbb{C}))$.

On veut maintenant montrer que $E$ stable par dérivation ; il suffit en fait de le montrer sur $G$, car $h \in G$ ssi $h' \in E$. Or $g_i(x+a) = \sum \lambda_{i,j}(a) g_j(x)$ donc en dérivant par rapport à $a$ on obtient $g_i'(x+a) = \sum \lambda_{i,j}'(a) g_j(x)$, et en particulier $g_i' = \sum_{j=1}^{s} \lambda_{i,j}'(0) g_j \in G$.

Il en découle que $\{f^{(k)}, k \in \mathbb{N}\} \subset E$ donc :

$$d = \min\{k \in \mathbb{N}, (f^{(0)}, \ldots, f^{(k)}) \text{ liée}\} \leq r$$

Comme $d$ minimal, on en déduit que $f$ n'est solution d'aucune EDL d'ordre strictement inférieur. D'autre part, $\exists (a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^d$ un vecteur non nul, tel que $a_d f^{(d)} = \sum_{k=0}^{d-1} a_k f^{(k)} \neq 0$. En particulier, $a_d \neq 0$ dont quitte à normaliser on peut supposer $a_d = 1$. $f$ est donc solution d'une EDL homogène à coefficients constants d'ordre $d$.

Réciproquement, si $f$ est solution de $u^{(d)} = \sum_{k=0}^{d-1} a_k u^{(k)}$ alors ses translatées aussi, donc $E$ est inclus dans l'espace des solutions de cette EDL, qui est de dimension $d$. On en déduit en particulier que $r \leq d$, d'où l'égalité annoncée dans l'énoncé. $\square$