$SO_3(\mathbb{R})$ et la sphère des quaternions

Léo Gayral

2017-2018

ref : Perrin – Cours d'algèbre – p.163

Remarque 1 (Corps des quaternions)**.** Soit $H = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1, i, j, k)$ de dimension 4. Les relations $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ induisent sur H une structure de corps (non commutatif) ; le centre de H est $Z(H) = \mathbb{R}$. Soit $q = a + ib + jc + kd$: on définit $\mathrm{Re}(q) = a$, $\mathrm{Im}(q) = ib + jc + kd$ et $\overline{q} = \mathrm{Re}(q) - \mathrm{Im}(q)$.

On a $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2} \times \overline{q_1}$, donc $|q| = \sqrt{q\overline{q}} \in \mathbb{R}$ définit une norme multiplicative sur H qui correspond en fait à la norme euclidienne dans la base $(1, i, j, k)$ de $H \cong \mathbb{R}^4$.

On définit alors $G = S(0, 1)$ le groupe (multiplicatif) des quaternions de module 1, avec l'inverse $q^{-1} = \overline{q}$.

Théorème 1. On a un isomorphisme de groupes $G/\{\pm 1\} \cong SO_3(\mathbb{R})$.

Démonstration.
On considère l'action par conjugaison $G \overset{S}{\curvearrowright} H$, et pour $q \in G$ on définit $S_q : q' \mapsto qq'\overline{q} \in GL(H)$, qu'on identifie à $GL_4(\mathbb{R})$ dans la base $(1, i, j, k)$. On a donc $S : G \to GL_4(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes.

Si $S_q = \mathrm{Id}$, alors $\forall q' \in H, qq' = q'q$ donc $q \in \mathbb{R} \cap G = \{-1, 1\}$. Réciproquement, $S_1 = S_{-1} = \mathrm{Id}$ d'où $\ker(S) = \{\pm 1\}$. D'autre part, S_q préserve la norme quaternionique sur H, donc $S_q \in O_4(\mathbb{R})$ dans la base canonique.

Soit $P = \mathrm{Vect}\,(i, j, k)$ les imaginaires purs de H, qui correspondent à l'orthogonal de $\mathbb{R} = \mathrm{Vect}\,(1)$ pour la structure euclidienne naturelle. On a $S_q|_{\mathbb{R}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$, donc S_q laisse P stable et est diagonale par blocs. On peut donc extraire la matrice $s_q = S_q|_P \in O_3(\mathbb{R})$. On en déduit le morphisme $s : G \to O_3(\mathbb{R})$ dont le noyau est encore $\{\pm 1\}$.

Les coefficients de s_q sont des polynômes de degré 2 en ceux de q. Par exemple, pour l'image de i par s_q, avec $q = a + ib + jc + kd$, on a :

$$\begin{aligned} s_q(i) &= (ia - b - kc + jd)(a - ib - jc - kd) \\ &= (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + 2(ad + bc)j + 2(bd - ac)k \end{aligned}$$

Il en découle $s : G \to O_3(\mathbb{R})$ continue. En particulier, l'image de G (la sphère unité de $\mathbb{R}^4$) est connexe dans O_3 et contient Id, donc quitte à restreindre l'image, on a le morphisme $s : G \to SO_3(\mathbb{R})$.

Il ne reste plus qu'à montrer la surjection de ce morphisme. Étant donné que les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, il suffit donc de montrer qu'on peut tous les atteindre. Dans $SO_3(\mathbb{R})$, un tel retournement est entièrement décrit par son axe de rotation. Soit donc un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$, qui correspond à un unique imaginaire pur $p \in G \cap P$ par l'identification précédente. On sait que $s_p(p) = p$ donc s_p fixe la droite $\mathbb{R}p$ qui est son axe de rotation. En outre, $p^2 = -1$ donc $s_p^2 = s_{-1} = \mathrm{Id}$, c'est donc une rotation d'angle π ou l'identité, mais $p \notin \{\pm 1\} = \ker(s)$ donc $s_p \neq \mathrm{Id}$, d'où s_p un retournement d'axe p. On atteint donc tous les retournements.

En passant au quotient, on en déduit l'isomorphisme $\overline{s} : G/\{\pm 1\} \to SO_3(\mathbb{R})$. □

Remarque 2 (Inverse explicite)**.** Si le calcul direct de $s(q)$ est assez explicite, il est en revanche bien moins évident de calculer un antécédent de $M \in SO_3(\mathbb{R})$ par s, puisqu'on doit *a priori* résoudre des équations polynomiales non linéaires.

En revanche, lorsqu'on connaît l'axe – un vecteur unitaire $u \in \mathbb{R}^3 \cong G \cap P$ – et l'angle $\theta \in \mathbb{R}$ d'une rotation, on peut en déduire un quaternion $p = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + p \times \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ qui engendre bien la rotation voulue.

Remarque 3 (Isomorphisme de H dans $A_2(\mathbb{C})$)**.** Soient $I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $K = IJ$. On vérifie aisément que $1, i, j, k \mapsto I_2, I, J, K$ induit un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres. En particulier, l'image de G est :

$$\begin{aligned} SU_2(\mathbb{C}) &= \{M \in M_2(\mathbb{C}), M^*M = MM^* = I_2, \det(M) = 1\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

En combinant cet isomorphisme avec le théorème précédent, on en déduit enfin $PSU_2(\mathbb{C}) \cong G/\{\pm 1\} \cong SO_3(\mathbb{R})$.