2-approximation du problème du voyageur de commerce euclidien

Léo Gayral

2017-2018

ref : Cormen – Introduction to algorithms, third edition – p.1099, p.1112

Définition 1. Considérons un graphe complet K sur les sommets V, muni d'une valuation $\omega : V^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\omega(x, x) = 0$.

Le problème du voyageur de commerce consiste en la recherche d'un cycle hamiltonien – qui passe une unique fois en chaque sommet – de poids minimal.

Quitte à translater ω de α à l'arrivée, ce qui augmente de $|V|\alpha$ le poids de tout cycle hamiltonien, on va par la suite supposer que ω ne prends que des valeurs positives.

Proposition 1. La version décisionnelle de ce problème – l'existence d'un chemin de poids plus petit que D – est *NP-complète.*

Démonstration.
Le problème est dans NP, car la donnée d'un chemin suffit à déterminer son poids, et à vérifier s'il s'agit d'un cycle hamiltonien.

Le problème est NP-dur par réduction depuis *HAM-CYCLE.* En effet, étant donné un graphe $G = (V, A)$, on peut définir la valuation $\omega(x, y) = \mathbb{1}_{A^c}[(x, y)]$ sur le graphe complet K associé. Ce faisant, G admet un cycle hamiltonien ssi K admet un tel cycle de poids (inférieur ou) égal à 0. $\square$

Théorème 1. Le graphe complet valué $G = (V, \omega)$ est dit euclidien si ω est une distance sur G :

— Réflexivité : $\omega(x, y) = \omega(y, x)$,

— Inégalité triangulaire : $\omega(x, z) \leq \omega(x, y) + \omega(y, z)$.

Si G est euclidien, on a un algorithme qui calcule une 2-approximation en temps polynômial.

Démonstration.
On nomme H^* un cycle hamiltonien de poids minimal, noté $\omega(H^*)$ par la suite.

Soit T un arbre couvrant de poids minimal, calculable en temps polynômial. Comme H^* contient un arbre couvrant, on a $\omega(T) \leq \omega(H^*)$.

On considère alors le cycle C correspondant au parcours complet de T. Ce faisant, on passe exactement deux fois sur chaque arrête, d'où $\omega(C) = 2\omega(T) \leq 2\omega(H^*)$.

Enfin, quitte à *oublier* les sommets visités plusieurs fois par C, on peut obtenir un cycle hamiltonien H tel que $\omega(H) \leq \omega(C)$. Si C est un cycle hamiltonien, $C = H$ convient. Sinon, un certain sommet x apparaît deux fois dans C. Quitte à remplacer $s \to x \to s'$ par $s \to s'$ dans C, on se ramène à C' un cycle plus court, tel que $\omega(C') \leq \omega(C)$ par inégalité triangulaire. Initialement, C visite au plus deux fois chaque sommet, donc en itérant $|V|$ fois cet argument, on obtient nécessairement un cycle surjectif qui visite n sommets, un cycle hamiltonien. □

Remarque 1. Dans le cas général, tout algorithme d'approximation est $NP - dur$.

Démonstration.
Supposons qu'on dispose d'un algorithme de r-approximation, avec $r > 1$.

Soit $G = (V, A)$ un graphe. Comme précédemment, on définit la valuation $\omega = 1 + r|V| \times \mathbb{1}_{A^c}$ sur le graphe complet K correspondant. Dans ce cas, G a un cycle hamiltonien ssi K a un cycle hamiltonien de poids (inférieur ou) égal à $|V|$.

Si on a un cycle hamiltonien dans G, de poids $|V|$ dans K, alors on peut obtenir une approximation de poids inférieur ou égal à $r|V|$. Sinon, comme tout cycle de poids minimal contient une arrête de poids $r|V| + 1$, l'approximation obtenue est *a fortiori* de poids strictement supérieur à $r|V|$.

La comparaison du poids de l'approximation au seuil $r|V|$ est une opération élémentaire. Autrement dit, on a réduit le problème $HAM - CYCLE$ à celui du calcul d'une r-approximation. □