NP-complétude de HAM-PATH

Léo Gayral

2017-2018

ref : Carton – Langages formels, Calculabilité et complexité – p.207

Lemme 1. On considère HAM-PATH le problème de la recherche d'un chemin hamiltonien – passant une seule fois par chaque sommet – au sein d'un graphe orienté. Ce problème est dans NP.

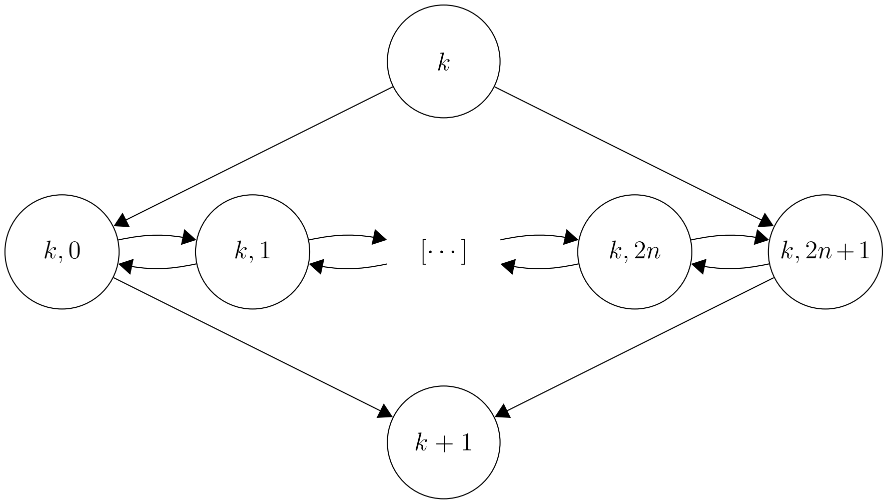
Démonstration.
Pour ce problème, un vérificateur convenable est un chemin w sur le graphe $G = (S, A)$, un mot de S^*. En effet, on peut en temps polynômial par rapport à $|G|$ vérifier qu'un tel chemin contient une unique fois chaque sommet de S et que chaque transition du chemin correspond bien à une arrête de A. $\square$

Théorème 1. On a une réduction polynômiale de SAT sous FNC vers HAM-PATH.

Démonstration.
On considère la formule $F = \bigwedge\limits_{i=0}^{n} C_i$, avec les clauses $C_i = \bigvee\limits_{j=1}^{m_i} t_{i,j}$ et $t_{i,j} \in \{x_0, \neg x_0, \ldots, x_r, \neg x_r\}$ des termes.

On peut faire un prétraitement de F, en éliminant les clauses qui seront toujours vérifiées parce qu'elles contiennent x et $\neg x$ pour une certaine variable x, et en éliminant les doublons dans les clauses restantes. On peut donc supposer par la suite que chaque variable apparaît au plus une seule fois dans chaque clause.

On associe le *gadget* suivant à chaque variable x_k :



On considère alors le graphe $G = (S, A)$ formé par l'union des gadgets associés à chacune des variables x_k de F, des sommets C_i, et des arrêtes suivantes :

— Si x_k est un terme de C_i, alors $(k, 2i) \to C_i, C_i \to (k, 2i+1) \in A$,

— Si $\neg x_k$ est un terme de C_i, alors $(k, 2i+1) \to C_i, C_i \to (k, 2i) \in A$.

Considérons un chemin hamiltonien au sein de ce graphe. Il part nécessairement de 0 qui n'a pas de prédécesseur, et termine nécessairement sur $k+1$ qui n'a pas de successeur. Par construction de G, ce chemin ne peut pas *changer* de gadget lors du passage sur un sommet C_i. En effet, si c'était le cas – disons par exemple qu'on a les transitions $(k, 2i) \to C_i \to (l, 2i)$ – alors lorsque le chemin passe en $(k, 2i+1)$, son seul successeur possible est $(k, 2i)$ – en raison du prétraitement de F – qui est déjà visité à un autre moment.

Si on excepte les éventuels *détours* ponctuels sur un C_i, le chemin considéré parcourt chaque gadget d'une seule traite, l'un après l'autre. Le *sens de parcours* du gadget de x_k, ou de façon équivalente le choix du successeur au sommet k, permet alors de définir une valuation pour x_k. Si un gadget est parcouru de gauche à droite, on pose $\nu(x_k) = 1$. Si il est parcouru de droite à gauche, on pose $\nu(x_k) = 0$.

Supposons que le chemin faut un crochet par C_i en parcourant le gadget de x_k de gauche à droite. D'une part, $\nu(x_k) = 1$. D'autre part, par construction du graphe, on a les transitions $(k, 2i) \to C_i \to (k, 2i+1)$, ce qui signifie que x_k est un terme de C_i par construction de G, donc $\nu(C_i) = 1$. On en déduit que tout chemin hamiltonien induit ν telle que $\nu(F) = 1$.

Réciproquement, toute valuation ν telle que $\nu(F) = 1$ induit des chemins hamiltoniens. On n'a pas de choix naturel dans ce sens car lorsque plusieurs termes d'une clause sont vérifiés, il faut choisir un seul des gadgets associés au sein duquel le chemin hamiltonien fera un crochet par la clause en question.

Autrement dit, l'existence d'un chemin hamiltonien dans G est équivalente à la satisfiabilité de F. On a bien réduit SAT à HAM-PATH. Cette réduction est bien polynômiale car G a $(r+2)+2(r+1)(n+1)+(n+1) = O\left(|F|^2\right)$ sommets, et de même pour les arrêtes.

$\square$