Nombres de Bell

Léo Gayral

2017-2018

ref : FGN – Oraux X-ENS, Algèbre 1 – p.14

Définition 1 (Nombres de Bell)**.** Une partition de $[\![1,n]\!]$ à r classes est un ensemble $\{I_1,\dots,I_r\}$ de parties non vides de $[\![1,n]\!]$, deux à deux disjointes, de sorte que $[\![1,n]\!] = \bigsqcup\limits_{j=1}^{r} I_j$.

Autrement dit, une partition de $[\![1,n]\!]$ s'identifie à une relation d'équivalence sur cet ensemble. En particulier, les classes ne sont pas ordonnées : $\{1\} \sqcup \{2\}$ et $\{2\} \sqcup \{1\}$ définissent la même partition de l'ensemble $[\![1,2]\!]$.

On pose enfin B_n le nombre de partitions de $[\![1,n]\!]$.

Lemme 1. Avec $B_0 = 1$ (il n'y a que $\emptyset$ qui partitionne $\emptyset$), on a la relation de récurrence $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$.

Démonstration.
Une partition de $[\![1,n+1]\!]$ est définie par ses classes d'équivalence. Notons C la classe de 1. Si $|C| = k \in [\![1,n+1]\!]$ alors on peut choisir les autres éléments de C de $\binom{n}{k-1}$ façons différentes. Une fois la classe C fixée, il reste à fixer une partition de $[\![1,n+1]\!]\backslash C$ pour définir notre partition sur l'ensemble initial ; comme $|[\![1,n+1]\!]\backslash C| = n+1-k$ on a alors $B_{n-(k-1)}$ telles partitions. Avec le changement d'indice $l = n-k+1$, on a :

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} B_{n-(k-1)} = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{n-l} B_l = \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} B_l$$

□

Lemme 2. $B_n \leq n!$.

Démonstration.
On prouve le résultat par récurrence, avec la relation précédente. On a un cas d'égalité pour $n = 0$, et si le résultat est vrai jusqu'à un rang n, alors :

$$B_{n+1} \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k! = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$$

$\square$

Théorème 1. On a l'égalité $B_n = \frac{1}{e} \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{k^n}{k!}$.

Démonstration.
Soit f définie par la série entière $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{B_n}{n!} x^n$. D'après le second lemme, $\left(\frac{B_n}{n!}\right)$ est bornée, donc la série entière a un rayon de convergence $R \geq 1$.

Montrons que $f(x) = e^{e^x - 1}$. On commence par dériver f :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n \\ & = & \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_k}{n!} x^n \\ & = & \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{B_k}{k!} x^k \times \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \right) \\ & = & \sum\limits_{k = \in \mathbb{N}} \frac{B_k}{k!} x^k \times \sum\limits_{m \in \mathbb{N}} \frac{x^m}{m!} \\ & = & e^x \times f(x) \end{array}$$

Par unicité des solutions, on en déduit $f(x) = C \times e^{e^x}$ et $f(0) = C \times e = B_0 = 1$, d'où l'égalité voulue.

D'autre part, $e^{e^x} = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{e^{nx}}{n!} = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{(nx)^k}{k!n!}$. Pour x fixé, on a convergence absolue de la série puisque $\sum\limits_{k,n \in \mathbb{N}} \left| \frac{(nx)^k}{k!n!} \right| = e^{e^{|x|}} < \infty$. En intervertissant les sommes, on a donc $e^{e^x} = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{k!} \left(\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^k}{n!} \right) x^k$.

Par unicité des coefficients dans le développement en série entière de f au voisinage de 0, on obtient enfin $B_k = \frac{1}{e} \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \frac{n^k}{n!}$. $\square$