Méthode itérative de résolution d'un système linéaire

Léo Gayral

2017-2018

ref : Dumas – Modélisation à l'oral de l'Agrégation – p.167

Définition 1. Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On veut résoudre le système $Ax = b$, dont l'unique solution est $a := A^{-1}b$. On considère un couple $(M, N) \in GL_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = M - N$.

On définit la suite u par la relation vectorielle $u_{k+1} = M^{-1}(Nu_k + b)$. Tout point fixe x de cet opérateur vérifie $x = M^{-1}(Nx + b)$ donc $Ax = Mx - Nx = b$, donc a est l'unique point fixe. En particulier, si u converge, sa limite est a.

On dit que la méthode itérative associée à (M, N) converge lorsque la suite u est convergente pour tout choix de $b, u_0 \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 1. La méthode itérative (M, N) converge ssi $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$.

Sens direct.
On raisonne par contraposée. On considère donc $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre telle que $|\lambda| \geq 1$ et $v \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre complexe associé. Comme $\lambda^k v \overset{\mathbb{C}^n}{\nrightarrow} 0$, c'est nécessairement vrai pour sa partie réelle ou imaginaire ; supposons $\mathrm{Re}\left(\lambda^k v\right) \nrightarrow 0$ sans perte de généralité. On fixe $u_0 = \mathrm{Re}(v) + a$. Par récurrence, on a :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= M^{-1}\left(N\left(\mathrm{Re}\left(\lambda^k v\right) + a\right) + b\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\lambda^k M^{-1}Nv\right) + M^{-1}(Na + b) \\ &= \mathrm{Re}\left(\lambda^{k+1} v\right) + a \end{aligned}$$

donc $u_k \nrightarrow a$, ce qui par les remarques préliminaires signifie que u n'est pas convergente, donc que la méthode (M, N) n'est pas convergente. $\square$

Sens réciproque.
Supposons maintenant $\rho\left(M^{-1}N\right) < 1$. Si on dispose d'une norme $||.||$ sur $\mathbb{R}^n$ telle que $|||M^{-1}N||| < 1$, alors on a :

$$||u_{k+1} - a|| = ||M^{-1}\left(Nu_k + b\right) - M^{-1}(Na + b)|| \leq |||M^{-1}N||| \times ||u_k - a||$$

donc une convergence de u vers a à vitesse géométrique, indépendamment du choix de u_0.

Il reste donc à montrer la proposition suivante, plus générale. □

Proposition 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Pour $\epsilon > 0$ quelconque, on a une norme subordonnée telle que $|||A||| \leq \rho(A) + \epsilon$.

Démonstration.
On commence par trigonaliser A en $T = PAP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{C})$. Quitte à conjuguer par la matrice $\operatorname{diag}\left(\delta^j, 0 \leq j \leq n-1\right)$ pour $\delta > 0$ assez petit, on peut de plus supposer que $\sup\limits_{i<j} |T_{i,j}| < \epsilon$.

On pose $||x|| := ||Px||_\infty$, qui définit bien une norme sur $\mathbb{R}^n$. On a alors :

$$||Ax|| = ||PAP^{-1}Px||_\infty = ||TPx||_\infty \leq ||T||_\infty \times ||Px||_\infty \leq (\rho(A) + \epsilon)\, ||x||$$

d'où le résultat voulu. □

Définition 2 (Cas particuliers)**.** Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On décompose $A = D - E - F$ où D est sa partie diagonale, $-E$ sa partie supérieure stricte et $-F$ sa partie inférieure stricte. On définit alors les méthodes suivantes :
— Jacobi : $(D, E + F)$ et on définit $J = D^{-1}(E + F)$.
— Gauss-Seidel : $(D - E, F)$ et on définit $\mathcal{L} = (D - E)^{-1}F$.
Comme $\det(D) = \det(D-E)$, les matrices J et $\mathcal{L}$ sont simultanément définies dès lors que $\det(D) \neq 0$, ce qu'on suppose par la suite.

Proposition 2. Si A est de plus tridiagonale, alors $\rho(\mathcal{L}) = \rho(J)^2$.

Il en découle que les méthodes de Jacobi et Gauss-Seidel convergent dans les mêmes situations, et qu'on peut raisonnablement espérer une convergence (géométrique) deux fois plus rapide avec Gauss-Seidel.

Démonstration.
En conjuguant comme dans la proposition précédente, on remarque que pour toute matrice tridiagonale A et tout $\mu \in \mathbb{C}^*$ on a $\det\left(D - \mu E - \mu^{-1}F\right) = \det(A)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. En exploitant cette remarque, on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \det(D)\chi_{\mathcal{L}}\left(\lambda^2\right) & = & \det(D-E)\det\left(\lambda^2 I_n - \mathcal{L}\right) \\ & = & \det\left(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F\right) \\ & = & \lambda^n \det\left([\lambda D] - \lambda E - \frac{1}{\lambda}F\right) \\ & = & \lambda^n \det\left(\lambda D - E - F\right) \\ & = & \lambda^n \det(D)\det\left(\lambda I_n - J\right) \\ & = & \lambda^n \det(D)\chi_J(\lambda) \end{array}$$

Autrement dit, $\chi_{\mathcal{L}}(\lambda^2) = 0$ ssi $\chi_J(\lambda) = 0$, d'où le résultat.

$\square$