Méthode de Newton sur les polynômes

Léo Gayral

2017-2018

ref : Chambert-Loir – Exercices de mathématiques pour l'agrégation, Analyse 2 – p.204

Théorème 1. Soit $P = \prod_{i=1}^{r} (X - a_i)^{m_i} \in \mathbb{R}[X]$ de degré au moins 2, avec $a_1 < \cdots < a_r$.

Alors la suite $\begin{cases} x_0 > a_r \\ x_{n+1} = x_n - \frac{P(x_n)}{P'(x_n)} \end{cases}$ est bien définie, strictement décroissante, de limite a_r.

Si $m_r = 1$, la convergence est quadratique : $x_{n+1} - a_r = O\left((x_n - a_r)^2\right)$. Si $m_r \geq 2$, la convergence est géométrique : $x_n - a_r = O\left(\left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n\right)$.

Démonstration.
Par le théorème de Gauss-Lucas, les racines de P' sont dans $[a_1, a_r]$, et a_r est une racine de multiplicité $m_r - 1$, donc il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$\varphi : x \mapsto x - \frac{P(x)}{P'(x)} \in \mathcal{C}^\infty\left(]a_r - \epsilon, \infty[\,, \mathbb{R}\right) .$$

On a $\varphi' = 1 - \frac{P'^2 - P \times P''}{P'^2} = \frac{PP''}{P'^2} > 0$ sur $]a_r, \infty[$ donc, pour $x > a_r$, on a $\varphi(x) > \varphi(a_r) = a_r$. Enfin, comme le coefficient dominant de P et P' sont positifs et qu'on se trouve *à droite* des racines, on a $\varphi(x) < x$ sur ce domaine.

Ainsi, si $x_n \in]a_r, \infty[$, alors $x_{n+1} := \varphi(x_n) \in]a_r, x_n[$. En particulier, (x_n) converge en décroissant strictement vers $x_\infty \in [a_r, x_0]$, qui est un point fixe de φ par continuité, donc nécessairement $x_\infty = a_r$.

Supposons $m_r = 1$. Dans ce cas, $\varphi'(a_r) = P(a_r) \times \frac{P''(a_r)}{P'(a_r)^2} = 0$. En faisant un développement limité à l'ordre 2, on en déduit que $\varphi(x_n) = \varphi(a_r) + \varphi''(a_r) \times \frac{(x_n - a_r)^2}{2} + o\left((x_n - a_r)^2\right)$. Par définition de $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ on a donc $\frac{x_{n+1} - a_r}{(x_n - a_r)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\varphi''(a_r)}{2}$, d'où le résultat voulu. On a de plus $\varphi''(a_r) = \frac{P''(a_r)}{P'(a_r)} \neq 0$, donc cette vitesse de convergence est optimale.

Supposons maintenant $m_r \geq 2$. Comme a_r a la multiplicité m_{r-2} dans P'', on en déduit que la fraction rationnelle $\varphi' = \frac{PP'}{P'^2}$ n'a pas de racine en a_r, $\varphi'(a_r) \neq 0$.

On considère $Q = \frac{P}{(X - a_r)^{m_r}} \in \mathbb{R}[X]$, de sorte que $\varphi = X - \frac{P}{m_r Q + (X - a_r) Q'}$. On a alors :

$$\begin{array}{rcl} \varphi' & = & 1 - \frac{[(X-a_r)Q]'(m_rQ+(X-a_r)Q') - (X-a_r)Q \times [m_rQ+(X-a_r)Q']'}{(m_rQ+(X-a_r)Q')^2} \\ & = & 1 - \frac{m_rQ^2+(X-a_r)\times[\cdots]}{m_r^2Q^2+(X-a_r)\times[\cdots]} \end{array}$$

et en particulier $\varphi'(a_r) = 1 - \frac{1}{m_r} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$. Comme précédemment, à l'ordre 1 on a $\frac{x_{n+1} - a_r}{x_n - a_r} \longrightarrow \varphi'(a_r) = 1 - \frac{1}{m_r}$, donc une convergence à vitesse linéaire.

Plus précisément, posons $\epsilon_n = x_n - a_r$. La convergence linéaire précédente nous donne, à partir d'un rang, $\epsilon_{n+1} \leq c\epsilon_n$ pour $c \in \left]\varphi'(a_r), 1\right[$ quelconque. On en déduit que la famille $\epsilon_n = O(c^n)$ est sommable. Si on monte à l'ordre 2, on a alors $\epsilon_{n+1} = \varphi'(a_r)\epsilon_n + O(\epsilon_n^2)$ donc, en passant au logarithme :

$$\begin{array}{rcl} \ln(\epsilon_{n+1}) - \ln(\epsilon_n) & = & \ln(\varphi'(a_r)) + \ln(1 + O(\epsilon_n)) \\ & = & \ln(\varphi'(a_r)) + O(\epsilon_n) \end{array}$$

comme tout $O(\epsilon_n)$ donne à nouveau une famille sommable, on en déduit qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(\epsilon_n) - n\ln(\varphi'(a_r)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda$ et donc, par continuité de l'exponentielle :

$$(x_n - a_r) \sim e^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{m_r}\right)^n.$$

□

Remarque 1. Un cas particulier de cette méthode est la méthode de Héron, connue depuis l'antiquité, qui approche la valeur de $\sqrt{a}$ en partant du polynôme $X^2 - a$ et de $x_0 = a + 1 > \sqrt{a}$.