Fonction caractéristique et moments

Léo Gayral

2017-2018

ref : Ouvrard – Probabilités 2 – p.208

Définition 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que f est n-dérivable en 0 si :
- Il existe un voisinage U de 0 tel que $f \in \mathcal{C}^{n-2}(U, \mathbb{C})$,
- $f^{(n-2)}$ est dérivable sur U,
- $f^{(n-1)}$ est dérivable en 0.

Théorème 1. Soient X une variable aléatoire réelle et $\varphi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ sa fonction caractéristique.

Si X admet un moment d'ordre n, alors $\varphi \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ et pour $k \in [\![0, n]\!]$ on a :

$$\varphi^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k e^{itX}\right]$$

et en particulier, $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right]$.

Réciproquement, si φ est $2n$-dérivable en 0, alors X admet un moment d'ordre $2n$.

Démonstration.
Si φ admet un moment d'ordre n, en tant que variable aléatoire elle a des moment pour tout ordre $k \in [\![1, n]\!]$. On considère en outre l'application :

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \Omega & \to & \mathbb{C} \\ (t, \omega) & \mapsto & e^{itX(\omega)} \end{array}$$

de sorte que $\varphi(t) = \mathbb{E}[\psi(t)]$. A $\omega \in \Omega$ fixé, ψ est $\mathcal{C}^n$ selon t. D'autre part, pour $k \leq n$, les variables aléatoires $\left(\partial_t^k \psi(t)\right)_{t \in \mathbb{R}}$ sont toutes dominées par $X^k \in L^1(\Omega)$. Par théorème de dérivation sous l'intégrale, on en déduit $\varphi \in \mathcal{C}^n$ et $\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}\left[\partial_t^k \psi(t)\right]$.

Montrons le sens réciproque par récurrence sur n. Si $n = 0$, on n'a rien à montrer. Supposons le résultat vrai au rang n, et φ une fonction $2(n+1)$-dérivable en 0. Par hypothèse de récurrence, X a un moment d'ordre $2n$ et donc $\varphi^{(2n)}(t) = \mathbb{E}\left[X^{2n}e^{itX}\right]$. En outre, $\varphi^{(2n)}$ est 2-dérivable en 0, donc elle y admet un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$\varphi^{(2n)}(t) = (-1)^n \mathbb{E}\left[X^{2n}\right] + at + bt^2 + o\left(t^2\right)$$

dont on déduit $\frac{\varphi^{(2n)}(t)+\varphi^{(2n)}(-t)-2\varphi^{(2n)}(0)}{t^2} = 2b + o(1)$. En revenant au formalisme des probabilités, on a donc :

$$\mathbb{E}\left[(-1)^n X^{2n}\frac{e^{itX}+e^{-itX}-2}{t^2}\right] \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 2b\,,$$

d'où la convergence de l'espérance des variables aléatoires positives :

$$\mathbb{E}\left[X^{2n} \times \frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] \to (-1)^{n+1}b \geq 0\,.$$

Comme $\cos(\alpha x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2}x^2 + O\left(x^4\right)$, par le lemme de Fatou :

$$\begin{array}{rcl}
\mathbb{E}\left[X^{2(n+1)}\right] & = & \mathbb{E}\left[X^{2n} \times X^2\right] \\
& = & \mathbb{E}\left[X^{2n} \times 2\liminf \frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] \\
& \leq & 2 \times \liminf \mathbb{E}\left[X^{2n} \times \frac{1-\cos(tX)}{t^2}\right] \\
& \leq & 2 \times (-1)^{n+1}b \\
& < & \infty
\end{array}$$

d'où le résultat voulu.

$\square$