Développement asymptotique de la série harmonique

Léo Gayral

2017-2018

ref : FGN – Oraux X-ENS, Analyse 1 – p.156

Lemme 1. Soit $\alpha > 1$. Par le critère de convergence de Riemann, la famille $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ est sommable. Le reste vérifie alors :

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}} .$$

Démonstration.
On considère la fonction $t \mapsto t^\alpha \in \mathcal{C}^0\left([1,\infty[,\mathbb{R}\right)$ positive décroissante, intégrable, de primitive $\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$. On a donc :

$$\int_n^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_n^\infty = \frac{1}{(\alpha-1)\, n^{\alpha-1}}$$

et on a le même équivalent pour l'intégrale partant de $n+1$.

Comme $\int_n^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$, en passant à la somme, on en déduit l'encadrement :

$$\int_{n+1}^\infty \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$$

d'où l'équivalent voulu. $\square$

Théorème 1. Soit $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors il existe $\gamma > 0$ telle que :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

Démonstration.
Par comparaison série-intégrale, on a :

$$\frac{1}{n} > \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) - \ln(n) > \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où $H_n - (\ln(n+1) - \ln(1)) = O\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right)$, et donc $H_n \sim \ln(n)$.

Posons maintenant $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} - u_n & = & (H_{n+1} - H_n) - (\ln(n+1) - \ln(n)) \\ & = & \frac{1}{n+1} - \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} \\ & < & 0 \end{array}$$

et de même :

$$\begin{array}{rcl} v_{n+1} - v_n & = & \frac{1}{n+1} - \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ & = & \frac{1}{n} - \int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} \\ & > & 0 \end{array}$$

or $u_n - v_n = \frac{1}{n} \to 0$ donc par critère de convergence des suites adjacentes, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\lim u_n = \lim v_n = \gamma$. On a en particulier $\gamma \geq v_1 > v_0 = 0$. Autrement dit :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)\,.$$

Pour passer à l'ordre suivant, on considère la suite décroissante définie par $t_n = u_n - \gamma$, de sorte que $t_n \to 0^+$. On a :

$$\begin{array}{rcl} t_n - t_{n-1} & = & u_n - u_{n-1} \\ & = & \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \\ & = & -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \end{array}$$

donc la série de terme général est sommable $(t_{n+1} - t_n)$ est sommable, et par équivalence des restes :

$$\sum_{k=n}^{\infty} (t_{k+1} - t_k) = -t_n \sim -\frac{1}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\,.$$

donc par le lemme technique, $t_n \sim \frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$ d'où $H_n = \ln(n) + \gamma + t_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour passer à l'ordre suivant, on considère $s_n = t_n - \frac{1}{2n}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} s_n - s_{n-1} & = & (t_n - t_{n-1}) + \left(\frac{1}{2n-2} - \frac{1}{2n}\right) \\ & = & (t_n - t_{n-1}) + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1\right) \\ & = & (t_n - t_{n-1}) + \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) \\ & = & -\frac{1}{3n^3} + \frac{1}{2n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \\ & \sim & -\frac{1}{6} \times \frac{1}{n^3} \end{array}$$

donc comme ci-dessus on en déduit $s_n \sim \frac{1}{6} \times \frac{1}{2n^2}$ et donc :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) .$$

On peut alors itérer ce processus indéfiniment, pour monter en précision dans le développement asymptotique. $\square$

Corollaire 1. Si on considère $k_n = \min\{k \in \mathbb{N}, H_k \geq n\}$, alors $\frac{k_{n+1}}{k_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e$.

Démonstration.
On a $H_n = \ln(n)+\gamma+t_n$ avec $t_n \to 0$. Par définition de k_n on a l'encadrement $H_{k_n-1} < n \leq H_{k_n}$ donc $\ln(k_n) = n - \gamma + o(1)$, d'où $k_n \sim e^{n-\gamma}$ et donc $\frac{k_{n+1}}{k_n} \sim e^{n+1-\gamma-(n-\gamma)} = e$. $\square$